

روش بوتاسترپ و مجموعه وزن‌های مشترک در تحلیل - پوششی داده‌ها برای افتراق واحدهای کارا

اکبر امیری¹، صابر ساعتی^{2*}، علیرضا امیر تیموری³

(1) گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

(2) گروه ریاضی، واحد تهران شمال، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

(3) گروه ریاضی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1398/12/08 تاریخ پذیرش مقاله: 1399/09/02

چکیده:

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) دامنه‌ی گسترده‌ای از مدل‌های ریاضی برای سنجش کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری متجانس با ورودی و خروجی مشابه است. مدل‌های مضر بی تحلیل پوششی داده‌ها، مجموعه‌ای از وزن‌ها را برای متغیرهای ورودی و خروجی هر واحد تصمیم‌گیری به دست می‌آورد و بر اساس آن کارایی نسبی هر واحد تصمیم‌گیری را محاسبه می‌کند. محاسبه وزن‌های مختلف برای شاخص‌های یکسان در مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری متجانس، واقع‌بینانه نیست. برای رفع این مشکل از روش مجموعه وزن‌های مشترک (CSW) استفاده شده است. برای به حداقل رساندن تعداد واحدهای کارا با رتبه یک از روش بوتاسترپ برای تعیین مجموعه وزن‌های مشترک استفاده می‌شود. رتبه یک واحد می‌تواند اطلاعات سودمندی در زمینه‌ی فعالیت‌های بهینه واحدهای تصمیم‌گیرنده در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار دهد. اینکه کدام واحد بر واحد دیگر اولویت دارد، این مفهوم برتری یک واحد را از نظر کارایی و اثربخشی بر واحدهای دیگر مشخص می‌کند. محاسبه کارایی واحدها برای مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها می‌تواند ملاک مناسبی برای رتبه‌بندی یک واحد باشد؛ اما مشکل اصلی زمانی است که چند واحد کارا همگی رتبه یک را لحاظ می‌کنند. هدف از این پژوهش، ارائه مدلی جهت رتبه‌بندی واحدهای کارا با استفاده از روش بوتاسترپ برای تعیین مجموعه وزن‌های مشترک در تحلیل پوششی داده‌ها است. تعیین مجموعه وزن‌های مشترک از طریق یافتن یک بازه اطمینان احتمالی برای وزن‌ها به کمک بوتاسترپ است که برآورد آن‌ها می‌تواند یک مجموعه وزن‌های مشترک احتمالی برای تحلیل پوششی داده‌ها به دست آورد و با توجه به آن واحدهای کارا از هم افتراق و رتبه‌بندی بین آن‌ها انجام می‌شود.

واژه‌ی کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، مجموعه وزن‌های مشترک، بوتاسترپ، رتبه‌بندی.

1. مقدمه

معرفی شد [4]. لیو و پنگ (2008) یک روش تحلیل وزن‌های مشترک برای پیدا کردن مجموعه‌ی وزن‌های مشترک واحدهای تصمیم‌گیری ابداع کردند [5]. هاشیموتو و ویو (2004) یک مدل برنامه‌ریزی توافقی پیشنهاد کردند که هدف آن پیدا کردن مجموعه‌ی وزن‌های مشترک واحدهای تصمیم‌گیری از طریق ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها و برنامه‌ریزی توافقی است [6]. کائو و هانگ (2005) نیز یک رویکرد حل توافقی مشابه را برای ایجاد وزن‌های مشترک در چارچوب تحلیل پوششی داده‌ها پیشنهاد کردند [7]. وانگ و همکاران (2011) از تحلیل رگرسیون برای پیدا کردن یک مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک ارائه کردند، در آن روش وزن‌های مشترک را از زاویه‌ی برازش کارایی تعیین می‌کند و کارایی‌های تحلیل پوششی داده‌های محاسبه‌شده از مطلوب‌ترین وزن‌های واحدهای تصمیم‌گیری را، به‌عنوان کارایی‌های هدف واحدهای تصمیم‌گیری در نظر می‌گیرند و بهترین برازش آن‌ها با کارایی‌های محاسبه‌شده از وزن‌های مشترک تعیین می‌شود. با کمینه‌سازی خطاهای برازش، وزن‌های مشترک به‌طور بهینه برآورد می‌شوند [8]. جهان‌شاهلو و همکاران (2005) از تبدیل یک مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه کسری به یک برنامه‌ریزی غیرخطی برای تولید وزن‌های مشترک استفاده کردند [9]. ساعتی و همکاران (2012) یک روش مجموعه وزن‌های مشترک دوفازی با استفاده از یک واحد مجازی ایده‌آل که به‌طور محاسباتی کارا است، پیشنهاد دادند [10]. عمرانی (2013) عدم قطعیت را در مدل تحلیل پوششی داده‌ها را با مجموعه وزن‌های مشترک پیشنهادی زهره بندیان و همکاران (2010) ترکیب کرد [11, 12]. عمرانی ابتدا یک تحلیل پوششی داده‌های روبات (Robust) را بر اساس روش بهینه روبات که توسط برتیماس و سیم (2004) پیشنهاد شده بود، بسط داد و کارایی هر واحد تصمیم‌گیری را به‌عنوان جواب ایده‌آل محاسبه کرد، سپس با بکار

روش تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) بر مبنای کار فارل (1957) جهت ارزیابی عملکرد مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری متجانس مطرح‌شده است، فارل که پایه‌گذار روش‌های غیر پارامتری در ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری بود، یک مدل در حالت دو ورودی و تک خروجی ارائه داد که به دلیل محدود بودن ورودی و خروجی مدل موفق نبود [2]. مقاله فارل مورد توجه چارلز و همکاران (1978) قرار گرفت و آن‌ها در سال 1978 در مقاله‌ای، مدل CCR را ارائه کردند، این مدل برای اندازه‌گیری و مقایسه کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری سازمانی که دارای چندین ورودی و چندین خروجی هستند، مورد بررسی قرار گرفت. این روش را ابزار سودمندی برای ارزیابی عملکرد در سازمان‌ها می‌دانند [3]. در مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها، هر واحد تصمیم‌گیری نسبت به سایر واحدهای تصمیم‌گیری در بهترین شرایط قرار می‌گیرد و مدل برای رسیدن به مجموعه‌ای از بهترین وزن‌های ورودی و خروجی حل می‌شود. در این مدل‌ها، وزن‌های به‌دست‌آمده در ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری متفاوت معمولاً یکسان نیستند؛ به‌عبارت‌دیگر، ورودی‌ها و خروجی‌های یکسان در ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری مختلف، ارزش‌های متفاوت دارند و این واقع‌بینانه نیست. از طرف دیگر، به دلیل ماهیت جبرانی بودن مدل‌های موجود، ممکن است با اختصاص وزن صفر، برخی از عوامل ورودی و خروجی حذف شوند که واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی در آن‌ها ضعف دارد. برای رفع این مشکل، روش مجموعه وزن‌های مشترک را به کار می‌برند. با به‌کارگیری مجموعه وزن‌های مشترک، ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری منصفانه‌تر می‌شود. ایده مجموعه وزن‌های مشترک برای اولین بار توسط رول و همکاران (1991) مورد استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری نگهداری بزرگراه‌ها

ویلسون (1998) برمی‌گردد که آن‌ها برای اولین بار از بوتاسترپ برای تحلیل حساسیت اندازه کارایی تحلیل پوششی داده‌ها استفاده کردند [21]. همچنین روش دیگری از بوتاسترپ را ارائه کردند که معایب بوتاسترپ معرفی شده توسط افرون (1979) را برطرف کرد [17, 21]. سیمار و ویلسون (2000) الگوریتم معرفی شده در سیمار و ویلسون (1998) را توسعه دادند و یک چارچوب کلی برای تخمین فرآیند تولید داده‌ها در مدل‌های مرزی ناپارامتری ارائه کردند [21, 22]. سیمار و ویلسون (2002) در سال 2002 روش اندازه‌گیری بازده به مقیاس جامعه را با استفاده از بوتاسترپ ارائه دادند [23]. سعید عبادی (1390) روشی برای رتبه‌بندی نمرات کارایی با استفاده از بوتاسترپ پیشنهاد داد که در آن بوت-استرپ را روی نمرات کارایی اصلی اعمال نمودند [1].

حال در سال 1986، اندروز و بوچینسکی در سال 2002 در مورد تعداد تکرار بوتاسترپ برای ساختن فاصله اطمینان پیشنهاد و روش‌هایی را ارائه کردند [24, 25]. تسولاس (2011) از بوتاسترپ در تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی عملکرد عملیات استخراج با وجود خروجی‌های مطلوب و نامطلوب استفاده کردند [26]. کوری و همکاران (2011) از بوتاسترپ در تحلیل پوششی داده‌ها برای تخمین کارایی فرودگاه ایتالیا در یک دوره زمانی مشخص پرداختند [27]. کیم و همکاران (2016) برای مطالعه مقایسه کارایی در مدیریت، کیفیت خدمات، کیفیت شبکه و بازار در صنعت بی‌سیم از بوتاسترپ و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها استفاده کردند و با استفاده از آن نتیجه گرفتند که توزیع حامل‌های بی‌سیم با بهره‌وری مدیریت بالا و توزیع حامل‌های بی‌سیم با راندمان بالای کیفیت شبکه یکسان هستند [28]. لی یانگ (2020) تحلیل کارایی بانک‌های تجاری شهر چین را با رویکرد کاربرد بوتاسترپ در تحلیل پوششی داده‌ها مورد مطالعه قرار دادند، با در نظر گرفتن خروجی‌های نامطلوب و با گسترش روش

بردن تقریب برنامه‌ریزی آرمانی و استفاده از کمینه کردن مقدار انحراف از جواب ایده آل، وزن‌های مشترک به دست آمد [11, 13]. ساعتی (2008) با اعمال کردن کران‌هایی روی عوامل، انعطاف‌پذیری مدل تحلیل پوششی داده‌ها را در تخصیص وزن‌ها به هر یک از واحدهای تصمیم‌گیری را محدود کرد. سپس با محدود کردن این انعطاف‌پذیری، یک مجموعه وزن‌های مشترک برای ارزیابی تمام واحد-های تصمیم‌گیری پیشنهاد کرد [14]. ساعتی و نائبی (2015) برای حل مسائل چندهدفه، با استفاده از روش فازی، یک تابع عضویت معرفی کردند سپس با به‌کارگیری آن به یک مجموعه وزن‌های مشترک دست یافتند که موجب شد همه واحدهای تصمیم‌گیری برای رسیدن به مقدار بهینه تابع هدف دارای سطح رضایت یکسان باشند [15]. پایان و همکاران (2014) با تعریف واحد تصمیم‌گیری ایده‌آل به‌عنوان یک معیار برای واحدهای تصمیم‌گیری کارا، یک مدل برای پیدا کردن مجموعه وزن‌های مشترک به دست آوردند [16]. بوتاسترپ برای اولین بار توسط افرون (1979) در سال 1979 برای فواصل اطمینان یک آماره معرفی شد و توسط افرون و تیبشیرانی (1993) توسعه یافت [17, 18]. سیمار (1992) از بوتاسترپ برای تخمین کارایی مربوط به داده‌های پانل در مدل‌های ناپارامتری استفاده کرد؛ و با در دسترس نبودن توزیع نمونه‌برداری تحلیلی بازده، یک روش بوتاسترپ را در این چهارچوب ارائه کردند که با استفاده از آن اهمیت آماری تخمین به‌دست‌آمده مورد ارزیابی قرار گرفت [19].

فرور و هیرسچبرگ (1997) بوتاسترپ را برای برآورد کارایی به‌دست‌آمده از برنامه‌ریزی خطی مورد استفاده قرار دادند. روش بوتاسترپ را بر روی کارایی‌های به‌دست‌آمده از مدل تحلیل پوششی داده‌ها انجام داده و با استفاده از آن یک فاصله اطمینان برای آن‌ها به‌دست آوردند [20]. شروع جدی بوت-استرپ در مدل‌های مرزی ناپارامتری به کار سیمار و

$$\theta_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \quad \forall j. \quad (1)$$

که در آن $(i=1, \dots, m)v_i$ و $(r=1, \dots, s)u_r$ به ترتیب وزن‌های ورودی و خروجی اختصاص داده شده به m ورودی و s خروجی هستند. چارلز و همکاران (1978) برای تعیین مجموعه‌ای از مطلوب‌ترین وزن‌های ورودی و خروجی، مدل CCR را به صورت زیر پیشنهاد کردند [3]:

$$\text{Max } \theta_o = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \quad (2)$$

$$st: \theta_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 \quad \forall j,$$

$$u_r \geq 0, \quad \forall r,$$

$$v_i \geq 0, \quad \forall i.$$

با استفاده از تبدیل چارلز و کوپر (1962) مدل برنامه‌ریزی کسری (2) را می‌توان به مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل کرد [30]:

$$\text{Max } \theta_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}$$

$$st: \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad \forall j, \quad (3)$$

$$u_r \geq 0, \quad \forall r,$$

$$v_i \geq 0, \quad \forall i.$$

وزن‌های ورودی و خروجی در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها متغیرند و برای هر واحد تصمیم‌گیری توسط مدل محاسبه می‌شوند. بعضی مواقع اتفاق می‌افتد که وزن خیلی کوچک یا صفر، به یک ورودی یا خروجی اختصاص می‌یابد که در عمل تأثیر شاخص مربوطه را در محاسبه کارایی کم می‌کند. با اعمال

بوت‌استرپ سیما و ویلسون (2002) از نظر آماری ویژگی اندازه‌گیری بازده به مقیاس را برای بانک‌های تجاری شهر چین برآورد کردند [29].

در مقاله‌های مطالعه شده از بوت‌استرپ برای بالا بردن میزان دقت کارایی برآورد شده و همچنین برای تحلیل حساسیت، رتبه‌بندی و ساخت بازه‌های اطمینان با استفاده از مقادیر کارایی به کار رفته است. در این مقاله، روش جدیدی را بر اساس بوت‌استرپ برای پیدا کردن مجموعه وزن‌های مشترک از طریق محاسبه بازه اطمینان برای وزن‌های عوامل ورودی و خروجی انجام شده است. استفاده از وزن‌های مشترک به دست آمده از روش بوت‌استرپ امکان آن را فراهم می‌کند که عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری بر یک مبنای یکسان مقایسه شود. روش جدید با استفاده از بوت‌استرپ، یک فاصله اطمینان 95% را برای وزن‌های ورودی و خروجی تعیین می‌کند. با این فاصله اطمینان یک مجموعه وزن‌های مشترک احتمالی $(PCSW)$ به دست می‌آید. با استفاده از آن واحدهای تصمیم‌گیری کارا از یکدیگر افتراق داده می‌شوند.

قسمت‌های مختلف مقاله به این صورت سازمان‌دهی شده است. در قسمت 2، مدل استاندارد و کران‌دار CCR معرفی می‌شود. در قسمت 3، روش بوت‌استرپ را بیان و الگوریتم فاصله اطمینان بوت‌استرپ برای به دست آوردن مجموعه وزن‌های مشترک احتمالی ارائه می‌شود. در قسمت 4، مثال عددی آورده شده است؛ و در قسمت آخر، نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

2. مدل استاندارد و کران‌دار CCR

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری دارید و هر واحد تصمیم‌گیری دارای m ورودی و s خروجی هست. همچنین فرض کنید x_{ij} ($i=1, \dots, m$) و y_{rj} ($r=1, \dots, s$) به ترتیب مقادیر ورودی و خروجی برای DMU_j ($j=1, \dots, n$) باشند. آنگاه کارایی DMU_j را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

استفاده می‌شود. بوتاسترپ با تولید نمونه‌های فراوان شرایط نمونه را به شرایط جامعه نزدیک می‌کند و برای محاسبه میانگین، انحراف معیار، فاصله اطمینان و تصحیح اربیبی در استنباط آماری مورد استفاده قرار می‌گیرد [19]. بوتاسترپ در چارچوب مدل‌های مرزی ناپارامتری توسط سیمار [19] معرفی شد. سیمار و ویلسون برای اولین بار از بوتاسترپ برای تحلیل حساسیت و ساخت بازه‌های اطمینان برای مقادیر کارایی استفاده کردند [21]. در بوتاسترپ B بار از نمونه‌ای که در دست دارید، نمونه با جایگذاری برمی‌دارید و پارامتر مورد نظر را برای هر یک از نمونه‌ها به دست آورده و میانگین آن‌ها را به‌عنوان برآورد بوتاسترپ در نظر می‌گیرید.

اگر $\{v_1, \dots, v_m\}$ و $\{u_1, \dots, u_s\}$ به ترتیب مجموعه وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها به‌دست‌آمده از مدل (3) باشد، هدف به دست آوردن یک فاصله اطمینان برای وزن‌های ورودی و وزن‌ها خروجی با استفاده از بوتاسترپ است. برای دستیابی به مجموعه وزن‌های مشترک، با کران‌دار کردن و ایجاد محدودیت برای وزن‌ها مسیر را برای پیدا کردن مجموعه وزن‌های مشترک آماده می‌سازد. در این روش برای وزن‌های ورودی و خروجی، کران‌های بالا و کران‌های پایین در نظر گرفته می‌شود؛ که در مقاله حاضر این کران‌ها با استفاده از روش بوتاسترپ به دست آورده می‌شود که به‌عنوان کران‌های احتمالی وزن‌های ورودی و خروجی به کار گرفته می‌شود و به دنبال آن مجموعه وزن‌های مشترک احتمالی حاصل می‌شود. فرض کنید B تعداد نمونه‌ها در بوتاسترپ باشد در این صورت الگوریتم بوتاسترپ برای محاسبه کران‌ها به شرح زیر است:

مرحله 1: نخست وزن‌ها و کارایی تمام واحدهای تصمیم‌گیری را با مدل (3) به دست آورده و سپس وزن‌های ورودی و خروجی به‌دست‌آمده از مدل (3) را مورد بررسی قرار داده و ماتریس‌های ستونی را به دست آورید؛ که در آن θ_j ($j=1, \dots, n$) کارایی

کران‌هایی روی وزن‌ها، می‌توان انعطاف‌پذیری مدل را در تخصیص وزن‌ها به هر یک از واحدهای تصمیم‌گیری محدود کرد. برای کنترل انعطاف‌پذیری وزن‌ها، از مدل کران‌دار زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Max } \theta_o &= \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\ \text{st : } \sum_{i=1}^m v_i x_{io} &= 1, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0 \quad \forall j, \\ u_r^l &\leq u_r \leq u_r^u, \quad \forall r, \\ v_i^l &\leq v_i \leq v_i^u, \quad \forall i. \end{aligned} \quad (4)$$

که در اینجا u_r^l ($r=1, \dots, s$) و u_r^u ($r=1, \dots, s$) به ترتیب کران‌های پایین و بالای وزن‌های خروجی‌ها، v_i^l ($i=1, \dots, m$) و v_i^u ($i=1, \dots, m$) به ترتیب کران‌های پایین و بالای وزن‌های ورودی‌ها می‌باشند. وقتی که این انعطاف‌پذیری محدود شود تا جایی که فقط یک مقدار برای هر وزن حاصل شود، مجموعه وزن‌های مشترک برای ارزیابی تمام واحدهای تصمیم‌گیری حاصل می‌شود. در قسمت بعدی روش بوتاسترپ برای به دست آوردن مجموعه وزن‌های مشترک ارائه می‌شود.

3. بوتاسترپ و مجموعه وزن‌های مشترک

بوتاسترپ روشی برای تقریب توزیع نمونه‌گیری و اندازه‌های دقت برآورد کننده با استفاده از بازنمونه‌گیری داده‌های موجود است که اولین بار توسط افرون در سال 1979 ارائه شد و کاربرد فراوانی در اکثر زمینه‌های علوم دارد [17]. بوتاسترپ نوعی شبیه‌سازی است با این تفاوت که در شبیه‌سازی داده‌های مورد استفاده، همگی ساختگی و تصنعی هستند ولی در روش بوتاسترپ از داده‌های واقعی برای به دست آوردن خواص تقریب سازی تجربی استفاده می‌شود. برای این منظور نمونه‌های متعددی با جایگذاری از نمونه موجود برای برآورد توزیع نمونه‌ای یک آماره

ترتیب از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$\left(\bar{V}_{boot} \left(\frac{\alpha}{2} \right), \bar{V}_{boot} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \right), \quad (7)$$

$$\left(\bar{U}_{boot} \left(\frac{\alpha}{2} \right), \bar{U}_{boot} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \right).$$

با انجام مراحل فوق و با قرار دادن $\alpha = 0.05$ یک فاصله اطمینان 95% به دست می‌آید که به‌عنوان کران‌های احتمالی برای وزن‌های ورودی و خروجی در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از الگوریتم فوق مدل کران‌دار (4) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\text{Max } \theta_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}$$

$$s.t.: \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \quad (8)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad \forall j,$$

$$\bar{U}_{boot} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \leq u_r \leq \bar{U}_{boot} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right), \quad \forall r,$$

$$\bar{V}_{boot} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \leq v_i \leq \bar{V}_{boot} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right), \quad \forall i.$$

که در آن $\bar{U}_{r(boot)} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$ و $\bar{V}_{i(boot)} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$ (8) شدنی و مقدار بهینه آن محدود به‌دست آمده‌اند.

به ترتیب کران‌های پایین و کران‌های بالای وزن‌های خروجی،

$$\bar{U}_{i(boot)} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \text{ و } \bar{V}_{i(boot)} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \text{ و } (1, \dots, m)$$

به ترتیب کران‌های پایین و کران‌های بالای وزن‌های ورودی هستند که با استفاده از الگوریتم بوت‌استرپ به‌دست آمده‌اند.

قضیه: مدل (8) شدنی و مقدار بهینه آن محدود است.

اثبات: واضح است که کران پایین وزن‌های ورودی و خروجی که از الگوریتم بوت‌استرپ به دست می‌آیند بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند. حال باید نشان دهید که کران بالای وزن‌های ورودی و خروجی

DMU_j ، v_{ij} وزن ورودی i -ام در DMU_j و u_{ij} وزن خروجی r -ام در DMU_j هستند.

$$[V_{ij}]_{n \times l} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \theta_j} [\theta_j v_{ij}]_{n \times l} \quad (i=1, \dots, m), \quad (5)$$

$$[U_{rj}]_{n \times l} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \theta_j} [\theta_j u_{rj}]_{n \times l} \quad (r=1, \dots, s).$$

مرحله 2: از نمونه‌های مشاهده شده (V_{1j}, \dots, V_{mj}) و (U_{1j}, \dots, U_{sj}) با روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با جایگذاری، یک نمونه بوت‌استرپ $(V_{1j}^*, \dots, V_{mj}^*)$ و $(U_{1j}^*, \dots, U_{sj}^*)$ به دست می‌آید.

مرحله 3: میانگین نمونه $(V_{1j}^*, \dots, V_{mj}^*)$ و $(U_{1j}^*, \dots, U_{sj}^*)$ را محاسبه کنید.

مرحله 4: مراحل 2 و 3 را به تعداد B بار تکرار کنید تا به تعداد B آماره‌ی بوت‌استرپ $\{\bar{V}_b^*; b=1, \dots, B\}$ و $\{\bar{U}_b^*; b=1, \dots, B\}$ به دست آید. سپس خطای استاندارد و توزیع برآوردگر را از فرمول‌های زیر محاسبه کنید:

$$\bar{V} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \bar{V}_b^*, \quad S_e = \left\{ \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\bar{V}_b^* - \bar{V})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$\bar{U} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \bar{U}_b^*, \quad S_e = \left\{ \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\bar{U}_b^* - \bar{U})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

مرحله 5: تابع توزیع تجمعی تجربی از B تعداد بوت‌استرپ $V_{1j}^*, \dots, V_{mj}^*$ و $U_{1j}^*, \dots, U_{sj}^*$ به ترتیب به صورت $G_u(t) = P(\bar{U}^* \leq t)$ و $G_v(t) = P(\bar{V}^* \leq t)$ محاسبه می‌شود که در آن میانگین نمونه بوت‌استرپ در مرحله 3 هستند و قرار دهید:

$$\bar{V}_{boot}(t) = G_v^{-1}(\alpha), \quad \bar{U}_{boot}(t) = G_u^{-1}(\alpha)$$

مرحله 6: فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ درصد بوت‌استرپ را برای میانگین وزن‌های ورودی و خروجی به

که در آن ρ متغیری است که محدوده بازه اطمینان یا محدوده بین وزن‌های متغیر در یک شاخص را به حداقل می‌رساند تا اینکه به یک وزن مشترک برسد. با مشخص شدن مجموعه وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها، کارایی واحدهای تصمیم‌گیری از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$e_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}} \quad \forall j. \quad (11)$$

که در آن $u_r^* (r=1, \dots, s)$ و $v_i^* (i=1, \dots, m)$ جواب‌های بهینه‌ی مدل (10) است.

4. مثال عددی

مثال ارائه‌شده توسط کائو و هانگ (2005) برای بررسی کارایی‌های 17 بخش جنگل (DMU) در تایوان در نظر گرفته شده است. این مسئله دارای 4 ورودی شامل بودجه برحسب دلار، موجودی اولیه (حجم موجودی جنگل قبل از دوره ارزیابی) برحسب مترمکعب، نیروی کار برحسب تعداد کارکنان و مساحت زمین برحسب هکتار و دارای 3 خروجی شامل محصول اصلی (تولید الوار) برحسب مترمکعب، حفاظت از خاک برحسب مترمکعب و تفریح برحسب تعداد بازدید است [7]. در جدول 1، مجموعه داده‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها برای هفده DMU در ستون‌های دوم تا هشتم آورده شده است.

از جدول 2 می‌توان دید که از 17 واحد تصمیم‌گیری، 9 واحد کارا هستند؛ که یکی از معایب مدل‌های پایه تحلیل پوششی داده‌ها عدم توانایی در افتراق واحدهای کارا از یکدیگر و یا به عبارتی وجود عدد یک برای کارایی بسیاری از واحدها است.

به‌دست‌آمده از الگوریتم بوتاسترپ کمتر یا مساوی کران بالای وزن‌های ورودی و خروجی در مدل CCR است. کران بالای وزن‌های ورودی و خروجی برای مدل CCR توسط ساعتی [14] به‌صورت زیر است:

$$v'_i = \frac{1}{\text{Max}_{1 \leq j \leq n} \{x_{ij}\}} \quad i = 1, \dots, \quad (9)$$

$$u'_r = \frac{1}{\text{Max}_{1 \leq j \leq n} \{y_{rj}\}} \quad r = 1, \dots, s$$

چون کران وزن‌های به‌دست‌آمده از روش بوتاسترپ با استفاده از میانگین وزن‌هایی است که از مدل CCR به‌دست آمده است، بنابراین وزن‌های به‌دست‌آمده از روش بوتاسترپ زیر بازه‌ای از $[0, v'_i]$ و $[0, u'_r]$ است، پس مدل (8) شدنی و مقدار بهینه آن محدود است. ■

کران‌دار کردن وزن‌ها، انعطاف‌پذیری در مدل تحلیل پوششی داده‌ها در تخصیص مجموعه‌ای از وزن‌ها به واحدهای تصمیم‌گیری را محدود می‌کند، اگر چنانچه انعطاف‌پذیری در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها امکان‌پذیر نباشد می‌توان مجموعه وزن‌های مشترک را برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری به کار برد. مدل پیشنهادی زیر برای محاسبه مجموعه وزن‌های مشترک، یک مدل کراندار است که به دنبال کوچک کردن حداکثر مقدار ممکن برای بازه اطمینان حاصل از الگوریتم بوتاسترپ است که با حل این مدل مجموعه وزن‌های مشترک به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{Max } \phi s. t: & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq \\ & 0 \forall j. \bar{U}_r(\text{boot}) \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \varphi \left(\bar{U}_r(\text{boot}) \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) - \right. \\ & \left. \bar{U}_r(\text{boot}) \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) \leq u_r \leq \bar{U}_r(\text{boot}) \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) - \\ & \varphi \left(\bar{U}_r(\text{boot}) \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) - \right. \\ & \left. \bar{U}_r(\text{boot}) \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right), \forall r, \bar{V}_r(\text{boot}) \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \\ & \varphi \left(\bar{V}_r(\text{boot}) \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) - \bar{V}_r(\text{boot}) \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) \leq v_i \leq \\ & \bar{V}_r(\text{boot}) \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) - \varphi \left(\bar{V}_r(\text{boot}) \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) - \right. \\ & \left. \bar{V}_r(\text{boot}) \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right), \forall i. \end{aligned} \quad (10)$$

جدول 1: مجموعه داده‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها برای هفده واحد تصمیم‌گیری

واحدهای تصمیم‌گیری	ورودی‌ها				خروجی‌ها		
	I1	I2	I3	I4	O1	O2	O3
DMU01	51/62	11/23	49/22	33/52	40/49	14/89	3166/71
DMU02	85/78	123/98	55/13	108/46	43/51	173/93	6/45
DMU03	66/65	104/18	257/09	13/65	139/74	115/96	0
DMU04	27/87	107/60	14/00	146/43	25/47	131/79	0
DMU05	51/28	117/51	32/07	84/50	46/20	144/99	0
DMU06	36/05	193/32	59/52	8/23	46/88	190/77	822/92
DMU07	25/83	105/80	9/51	227/20	19/40	120/09	0
DMU08	123/02	82/44	87/35	98/80	43/33	125/84	404/69
DMU09	61/95	99/77	33/00	86/37	45/43	79/60	1252/62
DMU10	80/33	104/65	53/30	79/06	27/28	132/49	42/67
DMU11	205/92	183/49	144/16	59/66	14/09	196/29	16/15
DMU12	82/09	104/94	46/51	127/28	44/87	108/53	0
DMU13	202/21	187/74	149/39	93/65	44/97	184/77	0
DMU14	67/55	82/83	44/37	60/85	26/04	85/00	23/95
DMU15	72/60	132/73	44/67	173/48	5/55	135/65	24/13
DMU16	84/83	104/28	159/12	171/11	11/53	110/22	49/09
DMU17	71/77	88/16	69/19	123/14	44/83	74/54	6/14

جدول 2: نتایج حاصل از اجرای مدل (3) برای داده‌های جدول 1

واحدهای تصمیم‌گیری	کارایی CCR	وزن‌های ورودی				وزن‌های خروجی		
		V1	V2	V3	V4	U1	U2	U3
DMU01	1	0/019372	0/000000	0/000000	0/000000	0/000000	0/000000	0/000316
DMU02	1	0/000888	0/007452	0/000000	0/000000	0/000000	0/005749	0/000000
DMU03	1	0/000000	0/008227	0/000330	0/004257	0/000000	0/008624	0/000000
DMU04	1	0/005335	0/006524	0/000000	0/001020	0/001443	0/007309	0/000000
DMU05	1	0/004736	0/005792	0/000000	0/000905	0/001281	0/006489	0/000000
DMU06	1	0/003649	0/004463	0/000000	0/000697	0/000987	0/004999	0/000000
DMU07	1	0/036898	0/000000	0/004934	0/000000	0/000000	0/008327	0/000000
DMU08	1	0/000142	0/008258	0/000000	0/003054	0/000000	0/007860	0/000027
DMU09	1	0/002966	0/003484	0/014202	0/000000	0/022012	0/000000	0/000000
DMU10	0/9403	0/000000	0/006771	0/000271	0/003503	0/000000	0/007097	0/000000
DMU11	0/9346	0/000000	0/004543	0/000182	0/002351	0/000000	0/004762	0/000000
DMU12	0/8290	0/000000	0/007689	0/004153	0/000000	0/005155	0/005507	0/000000
DMU13	0/7997	0/000000	0/004129	0/000166	0/002137	0/0000000	0/004328	0/000000
DMU14	0/7733	0/000000	0/007685	0/002716	0/003992	0/004783	0/007632	0/000000
DMU15	0/7627	0/000000	0/006462	0/003186	0/000000	0/000000	0/005614	0/000046
DMU16	0/7435	0/001041	0/008742	0/000000	0/000000	0/000000	0/006745	0/000000
DMU17	0/6873	0/005829	0/001824	0/006083	0/000000	0/015331	0/000000	0/000000

دهد. با استفاده از نتایج جدول 2، برای وزن‌های ورودی و خروجی و با استفاده از الگوریتم پیشنهادی بوت‌استرپ با تکرار $B=1000$ [24,25]، محدوده عوامل ورودی و خروجی به صورت جدول 3 به دست می‌آید. در جدول 3، ستون‌های اول و پنجم به ترتیب نمایش وزن‌های ورودی و خروجی، کران‌های بالای وزن‌های ورودی و خروجی رابطه (9) به ترتیب در ستون‌های چهارم و هشتم نشان داده شده است و در ستون‌های دوم، سوم، ششم و هفتم به ترتیب کران‌های پایین و بالای وزن‌های ورودی و خروجی به دست آمده از الگوریتم بوت‌استرپ آورده شده است؛ و با استفاده از جدول 3 و با به کارگیری مدل (8)، نتایج در جدول 4 آورده شده است.

وزن‌های عوامل یکسان بین واحدهای تصمیم‌گیری مختلف، بسیار متفاوت است. برای نمونه وزن‌های ورودی اول از 0 تا 0/036898 تغییر می‌کند، این انعطاف‌پذیری در انتخاب وزن می‌تواند بسیاری از ضعف‌های موجود در واحد تصمیم‌گیری را بپوشاند و واحدهای ناکارا را کارا نشان دهد؛ و همچنین 14 مورد از وزن‌های خروجی سوم، صفر هستند که نشان می‌دهند خروجی سوم در محاسبه کارایی نقش چندانی ندارد به عبارت دیگر خروجی سوم برای محاسبه کارایی نادیده فرض می‌شود که نشان‌دهنده یکی دیگر از ایرادهای کلی مدل‌های تحلیل پوششی - داده‌ها است. در ادامه استفاده از مدل کران‌دار این هدف را دنبال می‌کند تا تعداد اعداد یک را کاهش

جدول 3: فاصله اطمینان وزن‌های ورودی و خروجی با استفاده از روش بوت‌استرپ

وزن‌های ورودی	کران پایین روش بوت‌استرپ	کران بالای روش بوت‌استرپ	v_i	وزن‌های خروجی	کران پایین روش بوت‌استرپ	کران بالای روش بوت‌استرپ	u_r
V1	0/000104	0/000781	0/004856	U1	0/000053	0/000449	0/007156
V2	0/000226	0/000387	0/005173	U2	0/000225	0/000393	0/005095
V3	0/000053	0/000331	0/003890	U3	0/000000	0/000006	0/000316
V4	0/000038	0/000123	0/004401				

جدول 4: نتایج حاصل از اجرای مدل (8) برای داده‌های جدول 1

واحدهای تصمیم‌گیری	کارایی مدل کران‌دار	وزن‌های ورودی				وزن‌های خروجی		
		V1	V2	V3	V4	U1	U2	U3
DMU01	1/0000	0/011680	0/005173	0/003890	0/004401	0/007156	0/005095	0/000316
DMU02	1/0000	0/000000	0/005173	0/002561	0/002005	0/002613	0/005095	0/000022
DMU03	1/0000	0/000000	0/005108	0/001679	0/002653	0/002928	0/005095	0/000000
DMU04	0/8537	0/003796	0/005173	0/003000	0/002019	0/007156	0/005095	0/000000
DMU05	1/0000	0/000423	0/005173	0/003606	0/003015	0/007156	0/004617	0/000000
DMU06	1/0000	0/000000	0/004574	0/001616	0/002376	0/002846	0/004542	0/000000
DMU07	0/7507	0/004856	0/005173	0/003179	0/001307	0/007156	0/005095	0/000000
DMU08	0/8625	0/000000	0/005173	0/002983	0/003168	0/005567	0/004925	0/000004
DMU09	0/7754	0/004856	0/004520	0/003890	0/001388	0/007156	0/004770	0/000056
DMU10	0/8336	0/000000	0/005173	0/003645	0/003344	0/005814	0/005095	0/000000
DMU11	0/9346	0/000000	0/004543	0/000182	0/002351	0/000000	0/004762	0/000000
DMU12	0/7571	0/000909	0/005173	0/003890	0/001584	0/007156	0/004017	0/000000
DMU13	0/7997	0/000000	0/004129	0/000166	0/002137	0/000000	0/004328	0/000000
DMU14	0/6208	0/004856	0/004840	0/003890	0/001619	0/007156	0/005095	0/000058
DMU15	0/7008	0/000553	0/005173	0/003890	0/000573	0/001531	0/005095	0/000050
DMU16	0/5898	0/003547	0/005173	0/000508	0/000461	0/002300	0/005095	0/000036
DMU17	0/6410	0/004856	0/005173	0/002460	0/000205	0/007156	0/004293	0/000026

(11)، کارایی واحدهای تصمیم‌گیری محاسبه می‌شود که در جدول 6 آورده شده است. از جدول 6 مشاهده می‌شود که با استفاده از روش پیشنهادی تمامی واحدهای تصمیم‌گیری از هم افتراق شده‌اند و فقط یک واحد تصمیم‌گیری دارای عدد 1 است؛ و همان‌طور که ملاحظه می‌شود نتایج حل مدل با استفاده از روش‌های CCR و رویکرد کائو و هانگ [6] بر اساس مقادیر $p=1,2,\infty$ به ترتیب تحت عنوان MAD، MSE و MAX و روش مدل کران‌دار، ارائه شده است و به ترتیب در ستون‌های دوم، چهارم، ششم، هشتم و دهم جدول 6 آورده شده است و رتبه واحدهای تصمیم‌گیری بر اساس هر یک از مدل‌ها نیز به ترتیب در ستون‌های سوم، پنجم، هفتم، نهم و یازدهم جدول 6 آورده شده است؛ که نتوانسته‌اند تمامی واحدهای تصمیم‌گیری را از هم افتراق کنند.

از جدول 4 مشاهده می‌شود که تعداد واحدهای کارا از 9 واحد به 5 واحد کاهش پیدا کرده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود این مدل نیز نمی‌تواند واحدهای کار را از هم افزایش کند و همچنین وزن‌های عوامل یکسان بین واحدهای تصمیم‌گیری مختلف، متفاوت است، برای نمونه وزن‌های ورودی اول از 0 تا 0/011680 تغییر می‌کند، هرچند انعطاف‌پذیری مدل (8) از مدل (3) کمتر است ولی همچنان انعطاف‌پذیری در انتخاب وزن‌ها وجود دارد؛ و از طرفی تعداد وزن‌های خروجی سوم از 14 مورد به 9 مورد رسیده است. برای برطرف کردن این ضعف‌ها، با استفاده از مدل (10) یک مجموعه از وزن‌های مشترک احتمالی حاصل می‌شود که در جدول 5 نمایش داده شده است. با استفاده از نتایج جدول 5 و با به‌کارگیری مدل

جدول 5: مجموعه وزن‌های مشترک ایجاد شده با روش بوت‌استرپ.

	ورودی‌ها				خروجی‌ها		
	I1	I2	I3	I4	O1	O2	O3
وزن‌های مشترک	0/000443	0/000306	0/000192	0/000081	0/000251	0/000309	0/000003

جدول 6: نمرات کارایی و رتبه‌بندی بر اساس مدل‌های کائو و هانگ [6]، مدل کران‌دار و روش پیشنهادی (بوت‌استرپ).

واحدهای تصمیم‌گیری	مدل CCR	رتبه	مدل‌های Kao and Hung (2005)						مدل کران‌دار	رتبه	روش پیشنهادی	رتبه
			MAD	رتبه	MSE	رتبه	MAX	رتبه				
DMU01	1	1	1/0000	1	1/0000	1	1/0000	1	1/0000	1	0/7531	7
DMU02	1	1	1/0000	1	1/0000	1	1/0000	1	1/0000	1	0/8099	4
DMU03	1	1	1/0000	1	0/9989	3	0/7230	11	1/0000	1	0/7560	6
DMU04	1	1	1/0000	1	0/9927	4	0/8984	4	0/8537	8	0/9431	2
DMU05	1	1	0/9747	5	0/9866	5	1/0000	1	1/0000	1	0/9387	3
DMU06	1	1	0/8524	9	0/9123	6	0/8692	7	1/0000	1	1/0000	1
DMU07	1	1	0/9244	6	0/8849	7	0/7432	9	0/7507	13	0/7827	5
DMU08	1	1	0/8954	7	0/8707	9	0/8939	5	0/8625	7	0/5823	11
DMU09	1	1	0/6619	14	0/6690	14	0/7230	12	0/7754	11	0/6653	9
DMU10	0/9403	10	0/8721	8	0/8768	8	0/8761	6	0/8336	9	0/6787	8
DMU11	0/9346	11	0/6398	15	0/6518	15	0/6577	13	0/9346	6	0/4261	16
DMU12	0/8290	12	0/7456	10	0/7282	10	0/7594	8	0/7571	12	0/6096	10
DMU13	0/7997	13	0/6229	17	0/6260	16	0/6453	14	0/7997	10	0/4452	15
DMU14	0/7733	14	0/7140	12	0/7142	12	0/7142	10	0/6208	16	0/5708	12
DMU15	0/7627	15	0/7245	11	0/7210	11	0/6410	15	0/7008	14	0/5427	13
DMU16	0/7435	16	0/6996	13	0/6811	13	0/4665	17	0/5898	17	0/3888	17
DMU17	0/6873	17	0/6310	16	0/6068	17	0/5908	16	0/6410	15	0/4992	14

برآورده کرده‌اند. بر این اساس مشاهده می‌گردد که نتایج مدل پیشنهادی ویژگی فوق را برطرف می‌نماید. برای بررسی بیشتر نتایج، میزان همبستگی میان نتایج روش‌های مختلف در نظر گرفته شده است، از آنجاکه در جدول 6 با توجه به امتیازات حاصل از مدل‌های واحدهای تصمیم‌گیری در هر یک از مدل‌ها رتبه‌بندی شده‌اند و از طرف دیگر حداقل امتیاز کارایی برای واحد، توسط مدل اولیه CCR نیز به دست آمده است. بر این اساس ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن برای رتبه حاصل از مدل‌ها بر اساس رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum D_i^2}{n(n^2 - 1)} \quad (12)$$

در این رابطه r_s ضریب همبستگی رتبه‌ای حاصل از دو مدل و D_i اختلاف رتبه واحد تصمیم‌گیری i ام در دو مدل مورد بحث است.

با توجه به نتایج مدل CCR، مدل‌های MAD، MAX، MSE، مدل کران‌دار و مدل پیشنهادی به شرح جدول 7 نشان داده شده است.

ملاحظه می‌گردد که مدل ارائه شده در این تحقیق بالاترین ضریب همبستگی رتبه‌ای را نسبت به نتایج مدل CCR دارا است،

از سوی دیگر همبستگی رتبه‌ای میان نتایج مدل پیشنهادی با سایر مدل‌ها نیز محاسبه و در جدول 8 ارائه شده است.

ولی نتایج روش پیشنهادی رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری که به ترتیب در ستون‌های دوازدهم و سیزدهم جدول 6 آورده شده است. تمامی واحدهای تصمیم‌گیری را از هم افتراق نموده است و همچنین هیچ‌یک از وزن‌های ورودی و خروجی صفر نیستند و وزن‌های عوامل یکسان بین واحدهای تصمیم‌گیری مختلف، یکسان است و انعطاف‌پذیری وزن‌ها کنترل شده است و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری نیز به درستی انجام گرفته است. با بررسی و مقایسه نتایج روش پیشنهادی (روش بوتاسترپ) می‌توان نسبت به اعتبار نتایج آن به اظهار نظر پرداخت. در مقایسه با مدل CCR اولیه نتایج این مدل از قدرت تمایز بیشتری از میان واحدهای تصمیم‌گیری برخوردار است، بر اساس مدل CCR، 9 واحد تصمیم‌گیری کارا و دارای امتیاز 1 می‌باشند در حالی که در مدل پیشنهادی این وضعیت برای یک واحد تصمیم‌گیری صادق است. بر این اساس یکی از امتیازات اصلی این مدل در مشخص کردن یک واحد تصمیم‌گیری به عنوان کارایی نسبی بر اساس مجموعه وزن‌های مشترک قرار دارد که بر مبنای نظر رول و همکاران [4] و گولانی و یو [31] یکی از ویژگی‌های مجموعه وزن‌های مشترک آن است که باید بخش عمده‌ای از کارایی هر واحد تصمیم‌گیری را تشریح نماید. این الزام نشان می‌دهد که حداقل یکی از واحد تصمیم‌گیری باید با مجموعه وزن‌های مشترک به کارایی عدد یک دست یابند و در غیر این صورت مجموعه وزن‌های مشترک مقادیر کارایی را کمتر

جدول 7: ضریب همبستگی رتبه‌ای میان مدل CCR و سایر مدل‌ها.

روش پیشنهادی	مدل کران‌دار	MAX	MSE	MAD
0/815	0/763	0/737	0/746	0/740

جدول 8: ضریب همبستگی رتبه‌ای میان مدل پیشنهادی و سایر مدل‌ها.

مدل کران‌دار	MAX	MSE	MAD	CCR
0/630	0/550	0/825	0/785	0/815

پیشنهادی در این تحقیق بالاترین ضریب همبستگی رتبه‌ای را نسبت به نتایج مدل CCR را دارد؛ و همچنین همبستگی رتبه‌ای میان نتایج مدل پیشنهادی با سایر مدل‌ها همخوانی زیادی دارد؛ و با استفاده از این روش تمامی واحدهای تصمیم‌گیری از هم‌دیگر افتراق داد شد و رتبه‌بندی بین آن‌ها انجام گردید.

نقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران گرامی این مقاله به‌خاطر مطالعه دقیق و پیشنهادهای سازنده‌شان که موجب بهبود کیفیت و پربار شدن مقاله شد کمال تشکر و قدردانی را دارند.

این مقادیر همبستگی نشان می‌دهد که همخوانی زیادی میان نتیجه مدل پیشنهادی با سایر مدل‌های ارائه‌شده وجود دارد.

نتیجه‌گیری

عدم توانایی در تفکیک کردن واحدهای تصمیم‌گیری کارا یکی از معایب تحلیل پوششی داده‌ها است که علاقه پژوهشی زیادی را در مقالات تحلیل پوششی - داده‌ها موجب شده است. در این مقاله، برای کنترل وزن‌ها، ابتدا از مدل‌های کران‌دار استفاده شده است که با اعمال کران‌هایی روی وزن‌ها، انعطاف‌پذیری مدل در تخصیص وزن‌ها به هر یک از واحدهای تصمیم‌گیری را محدود می‌کند. با استفاده از روش بوت‌استرپ، یک فاصله اطمینان برای وزن‌های ورودی و خروجی با یکی از مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها ارائه شد. سپس با استفاده از این فاصله اطمینان، مجموعه وزن‌های مشترک احتمالی به دست آورده شد. مجموعه وزن‌های مشترک احتمالی در فاصله اطمینان موردنظر، این امکان را فراهم کردند که با کنترل وزن‌ها، برخی از ضعف‌های مدل استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها برطرف گردد. در صورتی که حداقل یکی از وزن‌های عوامل ورودی و خروجی مخالف صفر باشند، می‌توان با استفاده از مجموعه وزن‌های مشترک احتمالی به دست آمده از روش بوت‌استرپ، واحدهای تصمیم‌گیری کارا را از هم‌دیگر افتراق داد. با بررسی و مقایسه نتایج روش پیشنهادی (روش بوت‌استرپ) در مثال عددی این تحقیق می‌توان نسبت به اعتبار نتایج آن به اظهارنظر پرداخت. در مقایسه با مدل CCR نتایج این مدل از قدرت تمایز بیشتری از میان واحدهای تصمیم‌گیری برخوردار است، بر اساس مدل CCR، 9 واحد تصمیم‌گیری کارا و دارای امتیاز 1 می‌باشند در حالی که در مدل پیشنهادی این وضعیت برای یک واحد تصمیم‌گیری برقرار است. بر اساس ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن ملاحظه گردید که مدل

فهرست منابع

- [9] Jahanshahloo, G. R.; Memariani, A.; Lotfi, F. Hosseinzadeh; Rezai, H. Z. A note on some of DEA models and finding efficiency and complete ranking using common set of weights. *Applied mathematics and computation*, 2005. **166**(2): p. 265-281.
- [10] Saati, S., et al., *A common set of weight approach using an ideal decision making unit in data envelopment analysis*. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2012. **8**(3): p. 623-637.
- [11] Omrani, H., *Common weights envelopment analysis with uncertain data: A robust optimization approach*. *Computers & Industrial Engineering*, 2013. **66**(4): p. 1163-1170.
- [12] Zohrehbandian, M., A. Makui, and A. Alinezhad, *A compromise solution approach for finding common weights in DEA: An improvement to Kao and Hung's approach*. *Journal of the Operational Research Society*, 2010. **61**(4): p. 604-610.
- [13] Bertsimas, D. and M. Sim, *The price of robustness*. *Operations research*, 2004. **52**(1): p. 35-53.
- [14] Saati, S., *Determining a common set of weights in DEA by solving a linear programming*, in *Journal of industrial engineering international*. 2008. p. 51-56.
- [15] Saati, S. and N. Nayebi, *An algorithm for determining common weights by concept of membership function*. *Journal of Linear and Topological Algebra (JLTA)*, 2015. **4**(03): p. 165-172.
- [16] Payan, A., A.A. Noora, and F.H. Lotfi, *A Ranking Method Based on Common Weights and Benchmark Point*. *Applications & Applied Mathematics*, 2014. **9**(1).
- [1] عبادی سعید. روشی برای رتبه‌بندی نمرات کارایی با استفاده از بوت‌استرپ. تحقیق در عملیات و کاربردهای آن (ریاضی کاربردی). 1390. دوره 8، شماره 2.
- [2] Farrell, M.J., *The measurement of productive efficiency*. *Journal of the Royal Statistical Society Series a-General*, 1957. **120**(3): p. 253-290.
- [3] Charnes, A., W.W. Cooper, and E. Rhodes, *Measuring the efficiency of decision making units*. *European journal of operational research*, 1978. **2**(6): p. 429-444.
- [4] Roll, Y., W.D. Cook, and B. Golany, *Controlling factor weights in data envelopment analysis*. *IIE Transactions*, 1991. **23**(1): p. 2-9.
- [5] Liu, F.-H.F. and H.H. Peng, *Ranking of units on the DEA frontier with common weights*. *Computers & Operations Research*, 2008. **35**(5): p. 1624-1637.
- [6] Hashimoto, A. and D.-A. Wu, *A DEA-compromise programming model for comprehensive ranking*. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 2004. **47**(2): p. 73-81.
- [7] Kao, C. and H.-T. Hung, *Data envelopment analysis with common weights: the compromise solution approach*. *Journal of the Operational Research Society*, 2005. **56**(10): p. 1196-1203.
- [8] Wang, Y.-M., Y. Luo, and Y.-X. Lan, *Common weights for fully ranking decision making units by regression analysis*. *Expert Systems with Applications*, 2011. **38**(8): p. 9122-9128.

- repetitions for BCa confidence intervals. *Econometric Theory*, 962-984.
- [26] Tsolas, I. E., *Performance assessment of mining operations using nonparametric production analysis: A bootstrapping approach in DEA Resources Policy*, 2011. **36**(2): p. 159-167.
- [27] Curi, C., S. Gitto, & P. Mancuso, *New evidence on the efficiency of Italian airports: A bootstrapped DEA analysis*. Socio-Economic Planning Sciences, 2011. **45**(2): p. 84-93.
- [28] Kim, C., S.W. Kim, and H.J. Kang, *Driving Sustainable Competitive Advantage in the Mobile Industry: Evidence from US Wireless Carriers*. Sustainability, 2016. **8**(7): p. 659.
- [29] Li, Y., *Analyzing efficiencies of city commercial banks in China: An application of the bootstrapped DEA approach*. Pacific-Basin Finance Journal, 2020. 101372.
- [30] Charnes, A. and W.W. Cooper, *Programming with linear fractional functionals*. Naval Research logistics quarterly, 1962. **9**(3-4): p. 181-186.
- [31] Golany, B. and G. Yu, *A goal programming- discriminant function approach to the estimation of an empirical production function based on DEA results*. Journal of Productivity Analysis, 1995. **6**(2): p. 171-186.
- [17] Efron, B., *Computers and the theory of statistics: thinking the unthinkable*. SIAM review, 1979. **21**(4): p. 460-480.
- [18] Efron, B. and R.J. Tibshirani, *An Introduction to the Bootstrap, volume 57 of*. Monographs on Statistics and applied probability, 1993: p. 17.
- [19] Simar, L., *Estimating efficiencies from frontier models with panel data: a comparison of parametric, non-parametric and semi-parametric methods with bootstrapping*, in *International Applications of Productivity and Efficiency Analysis*. 1992, Springer. p. 167-199.
- [20] Ferrier, G.D. and J.G. Hirschberg, *Bootstrapping confidence intervals for linear programming efficiency scores: With an illustration using Italian banking data*. Journal of Productivity Analysis, 1997. **8**(1): p. 19-33.
- [21] Simar, L. and P.W. Wilson, *Sensitivity analysis of efficiency scores: How to bootstrap in nonparametric frontier models*. Management science, 1998. **44**(1): p. 49-61.
- [22] Simar, L. and P.W. Wilson, *A general methodology for bootstrapping in non-parametric frontier models*. Journal of Applied Statistics, 2000. **27**(6): p. 779-802.
- [23] Simar, L., & Wilson, P. W. (2002). *Non-parametric tests of returns to scale*. European Journal of Operational Research, 139(1), 115-132.
- [24] Hall, P. (1986), On the number of bootstrap simulations required to construct a confidence interval. *The Annals of Statistics* 14: 1453–1462.
- [25] Andrews, D. W., & Buchinsky, M. (2002). On the number of bootstrap