

افزایش قدرت تمایز واحدهای تصمیم گیرنده بر پایه کاهش پراکندگی وزن‌ها در تحلیل پوششی داده‌ها

اعظم پورحبیب یکتا^{۱*}، علیرضا امیر تیموری^۲، سهراب کردرستمی^۳، رضا کاظمی متین^۴

^(۱) دانشجوی دکتری ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان، گیلان، ایران

^(۲) استاد گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت، گیلان، ایران

^(۳) استاد گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان، گیلان، ایران

^(۴) دانشیار گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، البرز، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۷/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۰۹/۳۰

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، تکنیکی غیر پارامتری برای اندازه‌گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی و خروجی چندگانه، یکی از روش‌های بسیار محبوب در بین محققان بوده است. علیرغم محبوبیت این تکنیک غیر پارامتری، شامل چند ایراد از جمله فقدان قدرت تمایز بین واحدهای کارا و پراکندگی وزن می‌باشد. در این مطالعه یک روش مبتنی بر DEA چند هدفه (MCDEA) برای متعادل‌سازی وزن‌های ورودی و خروجی پیشنهاد شده است. مدل پیشنهادی با حفظ خاصیت بهینگی حاصل از مدل CCR، واریانس وزن‌های ورودی و خروجی را مینیمم می‌کند در نتیجه پراکندگی وزن‌های ورودی و خروجی متعادل‌تر می‌شود لذا قدرت تمایز واحدهای کارا بیشتر می‌شود یعنی تعداد واحدهای کارا کاهش خواهد یافت.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، پراکندگی وزن، واریانس.

۱- مقدمه

روش‌های رتبه‌بندی روش وزن مشترک است که ابتدا توسط رول و همکارانش [۱۷] معرفی گردید که در این روش عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده با فرض یکسانی شرایط، محاسبه می‌شود تا بتوان واحدها را مقایسه عادلانه کرد. محققان دیگری مانند کائو و هانگ [۱۰]، وانگ و لئو [۲۲]، سان و همکارانش [۱۹] این روش را گسترش دادند. پراکندگی وزن‌ها وقتی رخ می‌دهد که تعدادی از واحدهای تصمیم‌گیرنده ارزیابی شده در DEA، کارا شوند و وزن‌های ورودی و خروجی حاصل از مدل CCR مقادیر خیلی زیاد یا خیلی صفر داشته باشند. به طور کلی در مدل‌های DEA یکی از ویژگی‌های کلی این است که وزن‌های مربوط به ورودی‌ها و خروجی‌ها طوری تعیین می‌گردد که کارایی ماکزیمم شود. برای غلبه بر مشکل پراکندگی وزن اولین بار تامپسون و همکارانش [۲۰] روش ناحیه اطمینان را مطرح کردند که این روش دو نوع محدودیت وزنی برای وزن‌های ورودی و خروجی قرار می‌دهد پس از آن چارنز و همکارانش [۴] روش نسبت مخروطی پیشنهاد کردند که این روش فضای وزن‌های ورودی و خروجی را به یک مخروط محدب چند وجهی محدود می‌کند. محققان دیگری مانند رامون و همکارانش [۱۶] یک کران مضربی برای ارزیابی کارایی نسبی بدون متغیر کمکی در DEA پیشنهاد دادند. پس از آن بال و همکارانش [۲]، جهانشاهلو و شه‌میرزادی [۹] روش‌هایی را برای کاهش پراکندگی وزن‌ها در DEA مطرح کردند. اگرچه این مدل‌ها محدودیت اضافی را با مدل ترکیب می‌کنند و از این‌رو ممکن است حل مسئله را سخت‌تر کنند. با توجه به ضعف‌های ملاحظه شده در مدل‌های مورد بحث، در این تحقیق قصد داریم یک مدل جدید مبتنی بر DEA چند هدفه ارائه دهیم که از پراکندگی وزن‌های ورودی و خروجی حاصل از مدل CCR جلوگیری کند. برای دستیابی به این مفهوم درصد برآمدیم که طراحی مدل چنان باشد که قیود مدل، خاصیت وزن DEA را داشته باشد و علاوه بر آن خاصیت بهینگی حاصل از مدل CCR را نیز حفظ کند و همزمان واریانس وزن‌های ورودی و خروجی را مینیموم کند. در نتیجه این مینیمم سازی، پراکندگی وزن‌های ورودی و خروجی متعادل‌تر

امروزه محاسبه کارایی از اقدامات ضروری به منظور مقایسه میزان رقابت پذیری در عرصه‌های داخلی و خارجی یک کشور است. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یکی از روش‌های پرکاربرد در زمینه ارزیابی کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده همگن با ورودی‌ها و خروجی‌های مشابه و متعدد است که توسط چارنز و همکارانش [۳] ارایه شده است. علیرغم محبوبیت و کاربرد DEA، آن دارای چند ایراد مانند فقدان قدرت تمایز واحدهای کارا و پراکندگی وزن می‌باشد. مدل‌های پایه‌ای DEA در بهترین حالت به واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا اندازه کارایی یک را تخصیص می‌دهند لذا این مدل‌ها تمایزی بین واحدهای کارا ایجاد نمی‌کنند فقدان قدرت تمایز مسئله وقتی رخ می‌دهد که تعداد واحدهای تحت ارزیابی به اندازه کافی در مقایسه با تعداد کل ورودی‌ها و خروجی‌ها بزرگ نباشند. برای بهبود قدرت تمایز واحدهای کارا روش‌های زیادی در تحلیل پوششی داده‌ها صورت گرفته است. روش کارایی متقاطع که توسط سکستون و همکارانش [۱۸] ارائه شده است که طبق آن، ابتدا وزن‌های بهینه واحد تحت ارزیابی، را با مدل CCR بدست می‌آورند و سپس به کمک وزن‌های بهینه واحد تحت ارزیابی، سایر واحدها را ارزیابی می‌کنند که برای رفع مشکل غیر منحصر بفرد بودن ماتریس کارایی متقاطع که نتیجه نامنحصر بفرد بودن وزن‌های بهینه مدل CCR می‌باشد، دوپل و گرین [۸] استفاده از اهداف ثانویه را پیشنهاد کردند پس از آن اوباتا و ایشی [۱۵]، لیو و پنگ [۱۴]، لیانگ و همکارانش [۱۲]، دیمیترو و ساتون [۷]، به دنبال توسعه مدل دوپل و گرین اهداف ثانویه جدیدی معرفی کردند. روش سوپر کارایی که اولین بار توسط اندرسون و پیترسون [۱] پیشنهاد گردید یکی دیگر از روش‌های بهبود قدرت تمایز واحدهای کارا می‌باشد که از طریق حذف واحد تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی صورت می‌گیرد. تون [۲۱] سوپر کارایی را مبتنی بر متغیرهای کمکی در تحلیل پوششی داده‌ها محاسبه نمود. محاسبه اندازه سوپر کارایی از دیدگاه نشدنی توسط لی و همکارانش [۱۱]، صورت گرفت و پس از آن چن و همکارانش [۵] این روش را توسعه دادند. گروه سوم از

واحد حل خواهد شد و در نتیجه وزن بهینه از یک واحد تا واحد دیگر متفاوت خواهد بود و اغلب پیش از یک DMU کارا خواهد شد.

۲-۱- روش پیشنهادی بال و همکارانش [۲]
بال و همکارانش [۲] مدل جدیدی براساس کاهش پراکندگی وزن در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه دادند این مدل ترکیبی از ضریب تغییرات (CV) مخفف ($Coefficient of Variation$) وزن‌های ورودی و خروجی می‌باشد و برای بهبود قدرت تمایز در DEA و تعادل وزنی ورودی و خروجی پیشنهاد شده است. فرض کنید u_r ($r = 1, 2, \dots, S$) وزن خروجی r و \bar{u} میانگین u_r ($r = 1, 2, \dots, S$) باشد. CV را برای وزن‌های u_r از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{u} = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s u_r, \quad CV = \frac{1}{\bar{u}} \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^s (u_r - \bar{u})^2}{s-1}} \quad (2)$$

به طور مشابهی CV برای وزن v_i ($i = 1, 2, \dots, m$) به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{v} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_i, \quad CV = \frac{1}{\bar{v}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (v_i - \bar{v})^2}{m-1}} \quad (3)$$

متناظر با ضریب تغییرات برای وزن‌های ورودی و خروجی، روند مینیمم‌سازی هدف را با همان محدودیت‌های مدل مضربی CCR پیشنهاد می‌کنند که $CVDEA$ نام دارد:

$$w_0 = \text{Max} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0} - \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^s (u_r - \bar{u})^2}{s-1}}}{\bar{u} \sum_{j=1}^m v_j x_{ij} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (v_i - \bar{v})^2}{m-1}}} \quad (4)$$

$$\text{St.} \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, m$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

مدل پیشنهاد شده توسط بال و همکارانش [۲] تعبیر مدیرانه و اقتصادی ندارد زیرا وزن‌های ورودی و خروجی در DEA ابعاد و واحدهای مختلف دارند وزن‌هایی با ابعاد

می‌شود و قدرت تمایز واحدهای کارا بیشتر می‌شود لذا تعداد واحدهای کارا کاهش می‌یابد.

سازماندهی بخش‌های مختلف مقاله به این صورت است: در بخش بعدی مختصری از روش‌های موجود در DEA از جمله روش بال [۲] و جهان‌شاهلو و شه‌میرزادی [۹] بیان می‌شود. در بخش سوم روش مبتنی بر کاهش پراکندگی وزن که روش پیشنهادی ما می‌باشد، ارایه می‌گردد. به منظور روشن‌سازی این روش در بخش چهارم دو مثال ارایه می‌شود. نتیجه‌گیری در بخش پنجم آمده است.

۲- مروری بر روش‌های موجود

فرض کنید که مجموعه‌ای از n واحد تصمیم‌گیرنده متجانس داریم که هر واحد از m ورودی برای تولید S خروجی استفاده می‌کند. کارایی نسبی هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده با حل مدل برنامه‌ریزی خطی زیر بدست می‌آید که معروف به مدل مضربی CCR می‌باشد:

$$\text{Max} \quad z_0 = \sum_{r=1}^s u_r y_{r0}$$

$$\text{S.t.} \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1 \quad (1)$$

$$-\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s$$

که در آن DMU_0 واحد تحت ارزیابی و X_{ij} و Y_{rj} ورودی و خروجی واحد تحت ارزیابی می‌باشند. مقدار X_{ij} مقدار ورودی i ام ($i=1, \dots, m$) برای واحد تصمیم‌گیرنده j ام، Y_{rj} مقدار خروجی r ام ($r=1, \dots, S$) برای واحد تصمیم‌گیرنده j ام می‌باشد. همچنین v_i و u_r وزن ورودی i ام و خروجی r ام، Z_0 به عنوان نمره کارایی واحد تحت ارزیابی می‌باشد که این نمره کارایی کمتر یا مساوی یک می‌باشد. در صورتی که این نمره کارایی مساوی یک شود آن واحد را کارا و در صورتی که کمتر از یک شود آن واحد، ناکارای تلقی می‌شود. مدل فوق به ترتیب در ازای هر

که در آن

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_{ij}, \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_{rj}, \quad (r = 1, \dots, s).$$

می‌باشد. کوچکترین μ_k بهترین عملکرد است. مدل زیر برای ارزیابی کارایی استفاده می‌شود.

$$\eta_k = \text{Max} \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk} - \sum_{r=1}^s |u_{rk} - \bar{u}_r| - \sum_{i=1}^m |v_{ik} - \bar{v}_i|$$

$$S. t. \quad \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1, \quad (6)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ix} x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$u_{rk} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

۳- روش مبتنی بر کاهش پراکندگی وزن

در این بخش، برای حل مشکلات موجود در مدل‌های بیان شده و همچنین جلوگیری از پراکندگی وزن‌های ورودی و خروجی و همزمان کاهش تعداد واحدهای کارا، یک فرآیند دو مرحله‌ای برای رسیدن به این اهداف پیشنهاد می‌گردد:

گام اول: ابتدا مدل مضرری CCR را برای n واحد تصمیم‌گیرنده که هر کدام شامل m ورودی و s خروجی می‌باشد، اجرا می‌کنیم. وزن‌های بهینه حاصل از حل مدل مضرری CCR در جدول ۱ ثبت شده است.

و واحدهای مختلف نمی‌توانند به یکدیگر اضافه شوند و میانگین گرفته شوند برای معنی‌دار ساختن آنها داده‌های ورودی و خروجی باید ابتدا نرمال‌سازی شوند. بدیهی است با توجه به ویژگی پایا نسبت به واحد در *DEA*، این نرمال‌سازی تأثیری بر کارایی *DEA* ندارد. اما *CVDEA* این ویژگی را ندارد یعنی تبدیل مقیاس روی داده‌ها می‌تواند باعث تغییرات مهمی در کارایی آن شود و ممکن است جواب‌های بهینه موضعی چندگانه بعثت غیر خطی بودن تولید کند که منجر به نتیجه‌گیری متفاوت می‌شود. این حقایق نشان می‌دهد که مدل *CVDEA* دارای مشکلات جدی می‌باشد و ارزیابی کارایی توسط آن باید بسیار محتاطانه باشد.

۲-۲ روش پیشنهادی جهانشاهلو و

شهمیرزادی [۹]

جهانشاهلو و شهمیرزادی [۹] روش جدیدی برای رتبه بندی واحدهای کارا بر پایه نرم ۱ و میانگین وزن‌های ورودی و خروجی پیشنهاد کردند. آنها مدل زیر را که شاخص پراکندگی مجموع وزن‌ها (*SWDIDEA*) مخفف *Sum Weights Disparity Index* نامیدند را ارائه کردند:

$$\mu_k = \text{Min} \sum_{r=1}^s |u_{rk} - \bar{u}_r| + \sum_{i=1}^m |v_{ik} - \bar{v}_i|$$

$$S. t. \quad \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1, \quad (5)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ix} x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$u_{rk} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

جدول ۱: وزن‌های بهینه حاصل از حل مدل مضرری CCR

	وزن‌های ورودی				وزن‌های خروجی			
	V_1	V_2	...	V_m	U_1	U_2	...	U_s
۱	V_{11}^*	V_{21}^*	...	V_{m1}^*	U_{11}^*	U_{21}^*	...	U_{s1}^*
۲	V_{12}^*	V_{22}^*	V_{m2}^*	U_{12}^*	U_{22}^*	...	U_{s2}^*
⋮			⋮				⋮	
n	V_{1n}^*	V_{2n}^*	V_{m1}^*	U_{1n}^*	U_{2n}^*	...	U_{sn}^*

می‌باشد، به تمایز بیشتری بین واحدهای کارا هم می‌رسیم. مدل فوق یک مدل برنامه‌ریزی دو هدفه می‌باشد که به کمک برنامه‌ریزی آرمانی، می‌توان آن را تبدیل به مسئله یک هدفه کرد. برنامه‌ریزی آرمانی یک الگوی تصمیم‌گیری چند معیاره است که این الگو به‌طور هم‌زمان چند هدف را در بر می‌گیرد، یعنی به دنبال بهینه‌سازی چندین تابع هدف به صورت هم‌زمان است. لذا مدل فوق به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^m (\delta_i^+ + \delta_i^-) + \sum_{r=1}^s (d_r^+ + d_r^-) \\ \text{S. t.} \quad & \sum_{j=1}^n (v_{ij} - \bar{v}_i)^2 = n^* (\delta_i^+ - \delta_i^-), \\ & i = 1, \dots, m \\ & \sum_{r=1}^s (u_{rj} - \bar{u}_r)^2 = n^* (d_r^+ - d_r^-), \\ & r = 1, \dots, s \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \\ & j = 1, \dots, n \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = \theta_0^*, \\ & u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s \\ & v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (7)$$

۴. مثال‌ها

به منظور نمایش دادن اصلاح پراکندگی وزن‌های ورودی و خروجی و افزایش قدرت تمایز برای مدل پیشنهادی، مجموعه داده‌ها را برای دو مثال لی و ریورس [۱۳]، کوپر و همکارانش [۶] به کار می‌بریم.

مثال ۱: سه متغیر ورودی و سه خروجی برای هفت دانشکده از یک دانشگاه را در نظر می‌گیریم. ورودی‌ها به ترتیب عبارتند از: تعداد کارکنان آکادمی (x_1)، حقوق پایه کارکنان در هزار پوند (x_2)، اضافه کار کارکنان در هزار پوند (x_3) و خروجی‌ها به ترتیب تعداد دانشجویان دوره لیسانس (y_1)، تعداد دانشجویان فوق لیسانس (y_2) و تعداد مقالات پژوهشی (y_3) است. داده‌ها از مقاله لی و ریورس [۱۳] گرفته شده و در جدول ۲ ثبت شده است.

سپس با استفاده از اوزان بهینه ورودی و خروجی حاصل از گام اول، میانگین وزن‌های ورودی و خروجی را در ازای هر ورودی و هر خروجی با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{v}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_{ij}^*, \quad i = 1, \dots, m, \quad (7)$$

$$\bar{u}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_{rj}^*, \quad r = 1, \dots, s$$

گام دوم: در این مرحله، مدل زیر را که مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های چند هدفه برای متعادل سازی وزن‌های ورودی و خروجی می‌باشد، پیشنهاد می‌دهیم. مدل پیشنهادی با حفظ خاصیت بهینگی مدل CCR، واریانس وزن‌های ورودی و خروجی را مینیمم می‌کند در نتیجه پراکندگی وزن‌های ورودی و خروجی متعادل‌تر می‌شود و قدرت تمایز واحدهای کارا نیز بیشتر می‌شود در نتیجه تعداد واحدهای کارا کاهش می‌یابد. مدل ساختار چند هدفه به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (v_{ij} - \bar{v}_i)^2 \\ \text{Min} \quad & \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (u_{rj} - \bar{u}_r)^2 \\ \text{S. t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \\ & j = 1, \dots, n \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = \theta_0^*, \\ & u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s \\ & v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (8)$$

در محدودیت سوم مدل فوق، θ_0^* مقدار بهینه کارایی در DMU_0 حاصل از حل مدل CCR در گام اول می‌باشد این محدودیت در مدل برای حفظ کارایی DMU_0 قرار داده شده است. بدین ترتیب خاصیت بهینگی حاصل از مدل CCR حفظ می‌شود. با حل این مدل علاوه بر آنچه که هدف مدل یعنی مینیمم‌سازی پراکندگی وزن

جدول ۲: داده‌های هفت دیپارتمان از یک دانشگاه

DMU	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
#۱	۱۲	۴۰۰	۲۰	۶۵	۳۵	۱۷
#۲	۱۹	۷۵۰	۷۰	۱۳۹	۴۱	۴۰
#۳	۴۲	۱۵۰۰	۷۰	۲۲۵	۶۸	۷۵
#۴	۱۵	۶۰۰	۱۰۰	۹۰	۱۲	۱۷
#۵	۴۵	۲۰۰۰	۲۵۰	۲۵۳	۱۴۵	۱۳۰
#۶	۱۹	۷۳۰	۵۰	۱۳۲	۴۵	۴۵
#۷	۴۱	۲۳۵۰	۶۰۰	۳۰۵	۱۵۹	۹۷

مدل پیشنهادی را بر روی داده‌های فوق اجرا می‌کنیم. نتایج وزن‌های ورودی و خروجی و همچنین نمره کارایی در جدول ۳ ثبت شده است.

جدول ۳: نتایج مدل پیشنهادی

DMU	v_1	v_2	v_3	u_1	u_2	u_3	Efficiency
#۱	۰/۰۲۱۴	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۸۹	۰/۰۱۲۳	۰/۰۰۲۱	۱
#۲	۰/۰۲۲۱	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۲۸	۰/۹۷۷۹
#۳	۰/۰۱۱۵	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۷۴	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۱۲	۰/۹۸۹۰
#۴	۰/۰۶۴۲	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۹۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۸۰۰۵
#۵	۰/۰۲۰۹	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۳۰	۱
#۶	۰/۰۲۲۱	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۳۱	۱
#۷	۰/۰۲۲۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۲۰	۰/۹۶۴۶

برای مقایسه بیشتر و نشان دادن قدرت تمایز بیشتر مدل پیشنهادی، مجموعه داده‌ها را توسط مدل‌های CCR، جهانشالوو و شه‌میرزادی [۹]، بال [۲] ارزیابی نمودیم. نمرات کارایی در جدول ۴ ثبت شده است.

جدول ۴: نمرات کارایی حاصل از مدل‌های متفاوت

DMU	CCR	Jahanshaloo	Bal	New method
#۱	۱	۱	۱	۱
#۲	۱	۰/۹۴۹۱	۰/۹۸۸۳	۰/۹۷۷۹
#۳	۱	۱	۰/۹۹۶۸	۰/۹۸۹۰
#۴	۰/۸۱۹	۰/۸۱۷۴	۰/۸۴۱۵	۰/۸۰۰۵
#۵	۱	۱	۱	۱
#۶	۱	۰/۹۹۹۳	۰/۹۸۰۵	۱
#۷	۱	۰/۹۹۷۹	۱	۰/۹۸۵۱
Mean	۰/۹۷۴۱	۰/۹۶۶۲	۰/۹۷۲۴	۰/۹۶۴۶

به طور مشابه وزن‌ها برای سه خروجی هم باید بعد یکسان داشته باشند که در این مثال عددی خاص هم بعد هستند. واضح است که وزن‌های ورودی‌ها بخاطر تفاوت ابعاد نمی‌توانند میانگین یا ضریب تغییرات آنها اندازه‌گیری شود. در واقع محاسبه میانگین و ضریب تغییرات آنها بدلیل ابعاد و مقیاس‌های مختلف بی‌معناست. مزیت روش پیشنهادی نسبت به روش بال [۲] این است که مشکل محاسبه میانگین و ضریب تغییرات در ازای ورودی‌ها و خروجی‌هایی با واحدهای مختلف اندازه‌گیری، بر طرف گردیده است در مدل پیشنهادی میانگین و واریانس وزن‌های ورودی و خروجی در ازای هر ورودی و هر خروجی محاسبه می‌شود. بنابراین اندازه‌گیری واریانس و میانگین بی‌معنی نخواهد بود زیرا واحدهای اندازه‌گیری یکسان است.

مثال ۲: دوازده بیمارستان با دو ورودی تعداد پزشکان (X_1) و تعداد پرستاران (X_2) و دو خروجی تعداد بیماران سرپایی (V_1) و تعداد بیماران بستری (V_2) را در نظر بگیرید.

همان طور که در جدول ۴ دیده می‌شود تعداد واحدهای کارا از ۶ واحد به ۳ واحد در مدل پیشنهادی کاهش یافته است به بیان دیگر قدرت تمایز واحدهای کارا در روند پیشنهادی بیشتر شده است. میانگین نمرات کارایی در مدل CCR ، 0.9741 و در مدل جهان‌شاهلو و شه‌میرزادی [۹]، 0.9662 و در مدل بال [۲]، 0.9724 و در مدل پیشنهادی 0.9646 می‌باشد که نسبت به سه مدل قبل کمتر می‌باشد یعنی پراکندگی وزن‌ها در مدل پیشنهادی کمتر شده است. مدل بال [۲]، از نظر ابعاد مشکل دارد یعنی مدل بال [۲]، ضریب تغییرات و میانگین را به ازای هر DMU اندازه‌گیری می‌کند و این اندازه‌گیری در DEA بی‌معناست زیرا ورودی‌ها و خروجی‌ها دارای واحدهای مختلف اندازه‌گیری هستند. به عنوان نمونه در این مثال، واحد ورودی اول، نفر می‌باشد و واحدهای ورودی دوم و سوم پوند است. برای اینکه آنها بهم اضافه شوند وزن‌های آنها باید بعدهای عکس داشته باشند یعنی برای ورودی اول (نفر/۱) و ورودی دوم و سوم (پوند/۱).

جدول ۵: داده‌های ورودی و خروجی مربوط به ۱۲ بیمارستان

Hospitals	Input		Output	
	Doctors	Nurses	Out patients	Inpatients
#۱	۲۰	۱۵۱	۱۰۰	۹۰
#۲	۱۹	۱۴۱	۱۵۰	۵۰
#۳	۲۵	۱۶۰	۱۶۰	۵۵
#۴	۲۷	۱۶۸	۱۸۰	۷۲
#۵	۲۲	۱۵۸	۹۴	۶۶
#۶	۵۵	۲۵۵	۲۳۰	۹۰
#۷	۳۳	۲۳۵	۲۲۰	۸۸
#۸	۳۱	۲۰۶	۱۵۲	۸۰
#۹	۳۰	۲۴۴	۱۹۰	۱۰۰
#۱۰	۵۰	۲۶۸	۲۵۰	۱۰۰
#۱۱	۵۳	۳۰۶	۲۶۰	۱۴۷
#۱۲	۳۸	۲۸۴	۲۵۰	۱۲۰

نتایج وزن‌های بهینه ورودی و خروجی و نمره کارایی مدل پیشنهادی در جدول ۶ ثبت شده است.

جدول ۶: نمرات کارایی و وزن‌های ورودی و خروجی در مدل پیشنهادی

Hospital	v_1	v_2	u_1	u_2	efficiency
#۱	۰/۰۱۷۱	۰/۰۰۴۴	۰/۰۰۳۶	۰/۰۰۷۱	۰/۹۹۲۶
#۲	۰/۰۱۷۲	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۴۸	۰/۰۰۵۶	۱
#۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۳۶	۰/۰۰۵۶	۰/۸۷۶۹
#۴	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۶۴	۰/۹۹۹
#۵	۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۶۹	۰/۷۵۵۱
#۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۳۵	۰/۸۲۵۵
#۷	۰/۰۳۰۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۳۹	۰/۸۹۳۲
#۸	۰/۰۰۴۴	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۵۳	۰/۸۰۲۷
#۹	۰/۰۳۳۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۴۳	۰/۹۵۵۸
#۱۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۴۳	۰/۸۷
#۱۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۳۸	۰/۹۳۹۳
#۱۲	۰/۰۲۶۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۳۴	۰/۹۵۲۰

برای مقایسه بیشتر مجموعه داده‌ها را با مدل‌های مذکور
مورد ارزیابی قرار دادیم. نمرات کارایی در جدول ۷ ثبت

جدول ۷: نمرات کارایی حاصل از حل مدل‌های متفاوت

DMU	CCR	bal	jahanshahloo	New method
#۱	۱	۱	۱	۰/۹۹۲۶
#۲	۱	۱	۱	۱
#۳	۰/۸۸۳	۰/۸۸۲۳	۰/۸۸۱۹	۰/۸۷۶۹
#۴	۱	۰/۹۶۲۹	۱	۰/۹۹۹۰
#۵	۰/۷۶۳	۰/۶۶۶۶	۰/۷۵۷۷	۰/۷۵۵۱
#۶	۰/۸۳۵	۰/۸۰۲۴	۰/۸۳۵۵	۰/۸۲۵۵
#۷	۰/۹۰۲	۰/۸۶۹۷	۰/۸۶۵۸	۰/۸۹۳۲
#۸	۰/۷۹۶	۰/۷۴۵۸	۰/۷۹۶۶	۰/۸۰۲۷
#۹	۰/۹۶	۰/۷۹۳۸	۰/۹۵۹۳	۰/۹۵۵۸
#۱۰	۰/۸۷۱	۰/۸۷۲۱	۰/۸۷۰۳	۰/۸۷
#۱۱	۰/۹۵۵	۰/۹۴۵۶	۰/۹۵۴	۰/۹۳۹۳
#۱۲	۰/۹۵۸	۰/۸۵۲۵	۰/۹۷۹۰	۰/۹۵۲
Mean	۰/۹۱۰۲	۰/۸۶۸۷	۰/۹۰۸۳	۰/۹۰۵۱

خروجی در ازای هر ورودی و هر خروجی محاسبه می‌شود بنابراین اندازه‌گیری واریانس و میانگین بی معنی نخواهد بود زیرا واحدهای اندازه‌گیری یکسان است.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید تعداد واحدهای کارا از ۳ واحد در مدل CCR به ۱ واحد در مدل پیشنهادی کاهش یافته است. یعنی قدرت تمایز واحدهای کارا در مدل پیشنهادی بیشتر شده است. میانگین نمرات کارایی در مدل CCR ، $0/9102$ ، در مدل جهانشاهلو و شه‌میرزادی [۹]، $0/9083$ و در مدل پیشنهادی میانگین نمرات کارایی $0/9051$ می‌باشد که نسبت به دو روش مذکور، کمتر است و این نشان دهنده کاهش یافتن پراکندگی وزن‌های ورودی و خروجی است. قابل به ذکر است که اگرچه میانگین نمره کارایی در مدل بال [۲]، کمتر از بقیه روش‌ها می‌باشد ولی این مدل از نظر ابعاد مشکل دارد. یعنی مدل بال [۲] ضریب تغییرات و میانگین را به ازای هر DMU اندازه‌گیری می‌کند و این اندازه‌گیری در DEA بی‌معناست زیرا ورودی‌ها و خروجی‌ها دارای واحدهای مختلف اندازه‌گیری هستند.

۵- نتیجه‌گیری

در حالت کلی مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) در اغلب موارد پراکندگی وزن‌های نامتجانس از پارامترهای ورودی و خروجی را، نتیجه می‌دهد. به بیان دیگر چندین وزن ورودی و خروجی را نتیجه می‌دهند که صفر هستند یا مقادیر خیلی بزرگی دارند که ایجاب می‌کند پارامترهای وابسته آنها در محاسبه کارایی وارد نشوند. در این مقاله برای مقابله با این مشکلات با استفاده از مدل برنامه‌ریزی خطی دو مرحله‌ای درصد کاهش پراکندگی وزن‌های ورودی و خروجی و هم‌زمان افزایش قدرت تمایز واحدهای کارا هستیم. مدل پیشنهادی که مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های چند هدفه است، با حفظ خاصیت بهینگی مدل CCR ، واریانس وزن‌های ورودی و خروجی را مینیمم می‌کند در نتیجه پراکندگی وزن‌های ورودی و خروجی متعادل‌تر می‌شود و قدرت تمایز واحدهای کارا نیز بیشتر می‌شود در نتیجه تعداد واحدهای کارا کاهش می‌یابد. مزیت مدل پیشنهادی این است که میانگین نمرات کارایی و تعداد واحدهای کارا کاهش یافته است بنابراین قدرت تمایز بیشتر شده و پراکندگی وزن‌ها کاهش یافته است و در مدل پیشنهادی میانگین و واریانس وزن‌های ورودی و

operational Research Society 45(1994)
567- 578.

فهرست منابع

[9]. G. R.Jahanshahloo, P.F.Shahmirzadi, New methods for ranking decision making units based on the dispersion of weights and norm 1 in data Envelopment analysis, Computers & Industrial Engineering 65(2013) , 187-193.

[10]. C.Kao, H.T.Hung, Data envelopment analysis with common weights: the compromise solution approach, Journal of operational Research Society 56.(2005), 1196-1203.

[11]. H.Lee, and C.Wu, j.Zhu), Super-efficiency DEA in the presence of infeasibility, European Journal operation Research 212 (2011) ,141-147.

[12]. L.Liang J.Wu, W.D.Cook, J.zhu, Alternative Secondary goals in DEA cross- efficiency evaluation. International Journal of production Economics, 113 (2008). 1025- 30.

[13]. X.B.Li, G.R. Reevrs, A multiple criteria approach to data envelopment analysis, European Journal of operational Research 115(1999), 507-17.

[14]. F.H.F.Liu, H.H.Peng, Ranking of DMUS on the DEA frontier with Common weights, computers &operations Research, 35(2008) 1624-37.

[15]. T.ObataH. Ishii, A method for discriminating efficient candidates with ranked voting data, European Journal of operational Research, 151, (2003) 233-7.

[1] P.Andersen, N.C.Petersen, A procedure for ranking efficient units in data envelopment Analysis, Manage. Sci 39 ,(1993),1261- 1264.

[2]. H.Bal, H. H. Orkcu, S. Celebioglu, A new method based on the dispersion of weight in data envelopment analysis, computers & Industrial Engineering 54(2008), 502-512.

[3]. A.Charnes, w.w.E.Cooper, Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of operational Research (1978).429

[4]. A. Charnes, W. W.cooper, Z. M Huang, D.B.Sun, polyhedral cone- ratio models with an illustrative application to Large Commerical banks, Journal of Econometrics, 46(1990). , 73- 91.

[5]. J.X.Chen, M.Deng, S.Gingras, A modified super efficiency measure based on simultaneous input-output projection in data envelopment analysis ,computers &operations Research 38(20011) , 469-504.

[6]. W.W. Cooper , K.M. Seiford, K. Tone, Introduction to data envelopment analysis and its uses with DEA-solver software, springer(2007),USA.

[7]. S.Dimitrov, W.Sutton, promoting symmetric weight- selection in data envelopment analysis: a penalty function approach. European Journal of operational Research, 200 (2010), 281-8.

[8]. J.Doyle, R.Green, Efficiency and cross efficiency in DEA: Derivations, meaning and the uses. Journal of the

[16]. N.Ramon, J. Ruiz, I.Sirvant, A multiplier bound approach to assess relative efficiency in DEA without slacks, *European Journal of operational Research* 203(2010), 261-269.

[17]. Y.Roll, D. Cook, B. Golany, Controlling Factor weights in data Envelopment Analysis. *IIE Trans* 23(1991): 2-9.

[18]. T.R.Sexton, R.H.Silkman, A. J. Hogan, *Measuring efficiency: An Critique and data envelopment analysis*, San Francisco, (1986) CA: Jossey- Bass .

[19]. J. Sun, J. wu, D. Guo, performance ranking of units considering ideal and anti- ideal DMU with common weights, *Applied Mathematical Modeling* 37(2013),6301- 6310.

[20]. R.G.Thompson, F. G. Singelton., R.M. Thrall, B. A.Smith, Comparative site evaluations for locating a high-energy physics Lab in Texas, *Interfaces* 16 (1986) 35-49

[21]. K.Tone, A Slack- based measure of super- efficiency in data envelopment analysis, *European Journal operation Research* 43(2002),32-41.

[22]. Y. M.Wang, Y. X.Luo, Common weights for fully ranking decision making units by regression analysis, *Expert system with Applications* 38(2011), 9122-9128.

