دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره هفتم، پاییز ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

کارایی و اثربخشی در محیط تصادفی با شاخص‌های بازه‌ای

سپیده کاظم نادی[۱]، محسن رستمی مال خلیفه[۲*]

(۱) گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران
(۲) دانشیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۴/۲۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۰۹/۲۱

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) تکنیکی ناپارامتری بر مبنای برنامه‌ریزی ریاضی برای مشخص کردن کارایی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) متجانس است. در مدل‌های مختلف DEA تغییر تقاضا سبب تغییر در سطح خروجی می‌شود و هم چنین سبب تغییر در ناکارایی یک شرکت خواهد شد. اغلب یک شرکت می‌تواند ورودی‌های مؤثر بر سطح خروجی تنظیم کند. مدلی‌هایی با استفاده از تکنیک های مبتنی بر DEA طراحی شده که تغییرات تقاضا را به حساب می‌آورد و با روش برنامه‌ریزی ظرفیت کوتاه مدت، اثربخشی سیستم تولید شرکت را تحت تقاضا احتمالی معین کرده است.

در تحلیل پوششی داده‌ها فرض بر این است که داده‌های ورودی- خروجی و تقاضا دقیق باشند، در بعضی از مواقع داده‌ها با اختلاف و یا با اشتباه مشاهده می‌شوند بنابراین عدم قطعیت داده‌ها در نیل به اهداف از پیش تعیین شده دخیل است. برای اندازه‌گیری اثربخشی توسعه دادن تکنیک‌های DEA در بررسی عدم قطعیت داده‌ها مهم است. داده‌های ورودی- خروجی و تقاضا می‌تواند به صورت احتمالی، بازه‌ای، ترتیبی و غیره باشد. این مقاله در مورد داده‌های نادقیق که به صورت بازه‌ای هستند تمرکز می‌شود و مدل‌هایی برای محاسبه اثربخشی و بررسی اثر تقاضا احتمالی با داده‌های بازه‌ای ارائه خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، توسعه ظرفیت، تولید نهایی.

*. mohsen_rostamy@yahoo.com

۱- مقدمه

در سال ۱۹۷۸ روش تحلیل پوششی داده‌ها توسط فارل[1] با جامعیت بخشیدن به روش CCR[2] به گونه‌ای که خصوصیت فرآیند تولید با چند عامل تولید و چند محصول را دربرگیرد. این روش که عمدتاً به عنوان روش اندازه گیری کارایی در جهان شناخته شده است، در حین اندازه-گیری کارایی نوع بازده به مقیاس تولید را نیز به تفکیک برای بنگاه‌ها ارائه می‌نماید. با پیشرفت و تکامل روش فوق، در حال حاضر DEA[3] یکی از حوزه‌های فعال تحقیقاتی در اندازه‌گیری کارایی بوده است و به طور چشم گیری مورد استقبال پژوهشگران جهان قرار گرفته است. در مسائل تصمیم‌گیری کارایی یعنی خوب کار کردن، حاصل مقایسه شاخص‌های درون سازمانی است و در مقابل آن اثربخشی یعنی کار خوب کار کردن و حاصل مقایسه شاخص‌های برون سازمانی است. اثربخشی در یک سازمان بیانگر میزان خروجی‌هایی است که توانستند اهداف از پیش تعیین شده یک سازمان را تأمین کند، در اصل همان میزان تحقق اهداف می‌باشد.

تحلیل پوششی داده‌ها یک برنامه‌ریزی قطعی است که هدف آن تحلیل کارایی است، که با دادن کمترین ورودی به سیستم بیشترین خروجی را تولید کند.کارایی نشان می‌دهدکه برای رسیدن به یک هدف چه میزان از منابع استفاده شده است و چقدر هزینه صرف شده است ولی اینکه هدف تعیین شده مطلوب بوده یا خیر را نشان نمی-دهد در حالی که اثربخشی مشخص می‌کند که هدف مطلوب بوده یا خیر.

در سال ۱۹۸۲ لس[4] مسئله کلاسیک گسترش ظرفیت را بیان کرده و هدفش در حداقل سازی هزینه نسبت به کل فرآیند است. استیگر[5] در سال ۱۹۳۹ به بررسی تغییرات در خروجی و تئوری محصول دهی نهایی پرداخته است. در سال ۱۹۶۴ ویلسون[6] و اکستین[7] بیان کرده‌اند که هدف‌های بلند مدت و کوتاه مدت، رفتار محصول دهی متفاوتی را نشان می‌دهند و نتیجه گرفته‌اند که منحنی هزینه‌های بلند مدت پوششی از هزینه‌های کوتاه مدت را در بر می‌گیرند. بریج[8] و لاویوکس[9] در سال ۲۰۱۱ مسئله گسترش ظرفیت را با در نظر گرفتن ماهیت تصادفی تقاضا به مسئله گسترش ظرفیت با تقاضای غیر قطعی توسعه دادند. لی و جانسن[10] در سال ۲۰۱۲ بین فرآیند تولید و مصرف تقاضا تمایز قائل شدند و یک تابع تولید با تقاضا مشخص بیان کردند. لی و جانسن در سال ۲۰۱۴ یک روش برنامه‌ریزی ظرفیت کوتاه مدت را پیشنهاد کرده‌اند و اثر بخشی سیستم تولید شرکت را تحت تقاضا احتمالی معین کرده‌اند. آنها اثربخشی تخمین زده‌اند تا آن را از توابع تولید متمایز کند و تقاضا مشتری سطح خروجی را محدود نسازد از این رو مدلی با استفاده از تکنیک‌های مبتنی بر DEA طراحی کردند که تغییرات تقاضا در نظر می‌گیرد تا اثربخشی یک شرکت بهبود ببخشد.

در تحلیل پوششی داده‌ها فرض بر این است که داده‌ها (ورودی، خروجی و تقاضا) دقیق باشند، در بعضی از مواقع داده‌ها با اختلاف و یا اشتباه مشاهده می‌شوند بنابراین عدم قطعیت داده‌ها در نیل به اهداف از پیش تعیین شده دخیل است. برای اندازه‌گیری اثربخشی توسعه دادن تکنیک‌های DEA در بررسی عدم قطعیت داده‌ها مهم است. داده‌ها (ورودی، خروجی و تقاضا) می‌تواند به صورت احتمالی، بازه‌ای، ترتیبی و غیره باشد. این مقاله در مورد داده‌های نادقیق که به صورت بازه‌ای هستند تمرکز می‌کند و مدل‌هایی برای محاسبه اثربخشی و بررسی اثر تقاضا احتمالی با داده‌های بازه‌ای ارائه خواهد شد.

این مقاله از پنج بخش تشکیل شده است. در بخش دوم توضیح مختصری درباره چگونگی اندازه‌گیری اثربخشی می‌پردازد. در بخش سوم مدلی برای محاسبه اثربخشی و بررسی اثر تقاضا احتمالی با داده‌های بازه‌ای ارائه خواهد شد. در بخش چهارم یک مثال عددی ارائه می‌شود و در بخش پنجم نتیجه‌گیری بیان شده است.

1. Farell
2. Charnes.Cooper and Rhodes
3. Data Envelopment Analysis
4. Luss
5. Stigler
6. Wilson
7. Eckstein
8. Brige
9. Louveaux
10. Lee and Johnson

بخش ۲- اندازه‌گیری اثربخشی و بررسی اثر تقاضا احتمالی

در تحلیل پوششی داده‌ها تابع تولید، بیشترین خروجی را به ازای ورودی تولید می‌کند. لی و جانسن در سال ۲۰۱۴ تابع تولید با تقاضا مشخص را به صورت حداکثر تقاضا برای تولید یا سرویسی تعریف می‌کند که می‌تواند برآورده شود. تابع تولید با تقاضا مشخص اطلاعات تقاضا و محصول راترکیب می‌کند.آنها بیان کردند که یک شرکت به تولید مؤثر می‌رسد اگر محصول تولید شده توسط مشتری مصرف شود.

هم چنین لی و جانسن بیان کردند، اثربخشی تولید θ^E بزرگترین خروجی جریمه شده ممکن است که به ازای سطح ورودی داده شده تعریف می‌شود و این تعریف در مجموعه امکان تولید مؤثر است.

ظرفیت حداکثر سطح خروجی در فرآیند تولید است. پدینوسکی و فرساند[1] در سال ۲۰۱۰ یک تکنیک مشتقی جهت یافته را پیشنهاد کرده‌اند تا تولید نهایی کارا حاصل شود. چون تولید نهایی یک ویژگی پیشرو است محصول نهایی برای شرکت های ناکارا تعریف نمی‌شود.

لی و جانسن مدلی ارائه داده‌اند که از روش مبتنی بر سناریو استفاده می‌کند با این فرض که تقاضا یک متغیر تصادفی است. آنها دو نوع ورودی، ورودی ثابت و ورودی متغیر و یک خروجی در نظر گرفته‌اند. این مدل یک تصمیم مناسب با درنظرگیری انقباض یا انبساط ظرفیت، تحت تقاضا احتمالی ارائه می‌دهد، اندازه‌گیری اثربخشی و توسعه ظرفیت با استفاده از مدل مضربی BCC[2] با ماهیت خروجی بیان می‌شود.

بخش ۳- اندازه‌گیری اثربخشی با داده‌های بازه‌ای

در تمامی مباحث قبل فرض بر دقیق بودن ورودی ها، خروجی و تقاضا بود به این معنا که شرکت تحت ارزیابی با در اختیار داشتن مقدار معینی ورودی که خود توانایی انتخاب میزان آن را با توجه به تقاضا داشت، مقدار مشخصی خروجی تولید می‌کرد. ولی واقعیت امر این است که در بسیاری از موارد ممکن است ورودی‌ها، خروجی و تقاضا مقدار مشخصی نداشته باشد بلکه به صورت بازه‌ایی تعریف شود، از این رو به علت بازه‌ایی بودن ورودی، خروجی و تقاضا بازه ی اثربخشی معرفی خواهد شد.

فرض کنید هر ورودی (ثابت و متغیر) و خروجی و تقاضا در بازه‌ایی به صورت زیر در حال تغییر است:

$$\tilde{x}_{ij}^{F} \in [\, x_{ij}^{LF} , x_{ij}^{UF} \,] \quad \forall j \quad \forall i$$

$$\tilde{x}_{ij}^{V} \in [\, x_{ij}^{LV} , x_{ij}^{UV} \,] \quad \forall j \quad \forall i$$

$$\tilde{y}_{rj} \in [\, y_{rj}^{L} , y_{rj}^{U} \,] \quad \forall j \quad \forall r$$

$$\tilde{D}_{rj} \in [\, D_{rj}^{L} , D_{rj}^{U} \,] \quad \forall j \quad \forall r$$

که در آن L نشانگر کران پایین و U نشانگر کران بالا است، به این معنا که یک عدد در بازه فوق وجود دارد اما ما از مقدار دقیق آن بی اطلاع هستیم.

برای توسعه ظرفیت و تولید نهایی با داده‌های بازه‌ای مدل پیشنهادی پدینوسکی و فرساند به صورت بازه‌ای باز نویسی کرده و چون تولید نهایی یک ویژگی پیشرو است برای یک شرکت کارا r، تولید نهایی نسبت به ورودی متغیر j^* و یک خروجی q^* در بازه‌ی $[\, \beta_{j^*q^*r}^{VL} \,,\, \beta_{j^*q^*r}^{VU} \,]$ قرار دارد، بنابراین کافی است کران‌های پایین و بالا $\beta_{j^*q^*r}^{V}$ را به دست آوریم.

حال جهت به دست آوردن کران پایین تولید نهایی $\beta_{j^*q^*r}^{V+}$ که از سمت راست نزدیک می‌شود، ابتدا شرکت مورد بررسی را در بدترین حالت یعنی ورودی‌ها در کران بالا و خروجی‌ها در کران پایین و بقیه شرکت‌ها در بهترین حالت ورودی‌ها در کران پایین و خروجی‌ها در کران بالا قرار دهیم، مدل زیر حاصل خواهد شد:

$$\beta_{j^*q^*r}^{VL+} = Min \quad \upsilon_{j^*}^{V}$$

$$s.t. \; \sum_{i=1}^{I} \upsilon_i^{F} X_{ir}^{UF} + \sum_{j=1}^{J} \upsilon_j^{V} X_{jr}^{UV} - \sum_{q=1}^{Q} u_q Y_{qr}^{L} + u_o = 0 \qquad (۱)$$

---

1. Podinovski and Forsund
2. Banker, Charnes, Cooper

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{I} \upsilon_i^F X_{ik}^{LF} + \sum_{j=1}^{J} \upsilon_j^V X_{jk}^{LV} - \\
&\sum_{q=1}^{Q} u_q Y_{qk}^{U} + u_o \ge 0 \\
&u_{q*} = 1 \\
&\upsilon_i^F, \upsilon_j^V, u_q \ge 0,\ u_o \text{ free}
\end{aligned}
$$

حال شرکت r در بهترین حالت و بقیه شرکت‌ها در بدترین حالت قرار می‌دهیم تا کران بالا تولید نهایی به دست آید:

$$
\begin{aligned}
&\beta_{j^* q^* r}^{VL+} = Min \quad \upsilon_{j*}^V \\
&s.t.\ \sum_{i=1}^{I} \upsilon_i^F X_{ir}^{UF} + \sum_{j=1}^{J} \upsilon_j^V X_{jr}^{LV} - \\
&\sum_{q=1}^{Q} u_q Y_{qr}^{U} + u_o = 0 \\
&\sum_{i=1}^{I} \upsilon_i^F X_{ik}^{UF} + \sum_{j=1}^{J} \upsilon_j^V X_{jk}^{UV} - \\
&\sum_{q=1}^{Q} u_q Y_{qk}^{L} + u_o \ge 0 \\
&u_{q*} = 1 \\
&\upsilon_i^F, \upsilon_j^V, u_q \ge 0,\ u_o \text{ free}
\end{aligned}
\qquad (۲)
$$

به همین ترتیب مدل‌هایی برای اندازه‌گیری بازه‌ی تولید نهایی از سمت چپ تعریف می‌گردد.

لی و جانسن در سال ۲۰۱۴ روش مبتنی بر سناریو که سناریو یک حالت خاص از تقاضا تعریف می‌شود، برای اندازه‌گیری اثربخشی تحت تقاضا احتمالی مدلی پیشنهاد کرده‌اند که در آن فرض بر دقیق بودن ورودی، خروجی و تقاضا بود. در اینجا فرض می‌کنیم ورودی، خروجی و تقاضا مقدار مشخصی نداشته باشند بلکه به صورت بازه‌ای تعریف شوند. برای بدست آوردن بازه‌ی اثربخشی از مدل مضربی BCC با داده‌های بازه‌ای در ماهیت خروجی استفاده می‌شود، بنابراین مقدار اثربخشی برای شرکت r تحت تقاضا s با مقدار نادقیق به دست می‌آید در نتیجه مقدار اثربخشی در بازه‌ی $[\theta_{rs}^{EL}, \theta_{rs}^{EU}]$ قرار دارد.

ابتدا حالت کلی مدل روش مبتنی بر سناریو با داده‌های بازه‌ای در نظر می‌گیریم. مدل به صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad M\tilde{\theta}_{rs}^{E} + \sum_{j=1}^{J} (d_{jrs}^{+} + d_{jrs}^{-}) \\
&s.t.\quad \tilde{\theta}_{rs}^{E} = \sum_{i=1}^{I} \upsilon_{is}^F \tilde{X}_{ir}^F + \sum_{j=1}^{J} \upsilon_{js}^V (\tilde{X}_{jr}^V + d_{jrs}) + \\
&w_s \tilde{D}_{rs} + \upsilon_{os} \\
&u_s y_{rs}^P + w_s y_{rs}^P = 1 \\
&\sum_{i=1}^{I} \upsilon_{is}^F \tilde{X}_{ik}^F + \sum_{j=1}^{J} \upsilon_{js}^V \tilde{X}_{jk}^V - u_s \tilde{Y}_{ks} + \upsilon_{os} \ge 0, \quad \forall k \backslash r \\
&\sum_{i=1}^{I} \upsilon_{is}^F \tilde{X}_{ir}^F + \sum_{j=1}^{J} \upsilon_{js}^V (\tilde{X}_{jr}^V + d_{jrs}) - u_s y_{rs}^P + \upsilon_{os} \ge 0 \\
&y_{rs}^P = [y_{rs} - \alpha_{rs}(\tilde{D}_{rs} - y_{rs})](1 - z_{1rs}) \\
&+ [\tilde{D}_{rs} - \delta_{rs}(y_{rs} - \tilde{D}_{rs})] z_{1rs} + \varepsilon \\
&y_{rs} - \tilde{D}_{rs} < M z_{1rs} \\
&y_{rs} - \tilde{D}_{rs} \ge -M(1 - z_{1rs}) \\
&y_{rs} = \tilde{Y}_r + \sum_{j=1}^{J} \beta_{jr}^V d_{jrs} \\
&\beta_{jr}^V = \tilde{\beta}_{jr}^{V+} z_{2jrs} + \tilde{\beta}_{jr}^{V-} (1 - z_{2jrs}), \quad \forall j \\
&d_{jrs} < M z_{2jrs}, \quad \forall j \\
&d_{jrs} \ge -M(1 - z_{2jrs}), \quad \forall j \\
&d_{jrs} = d_{jrs}^{+} - d_{jrs}^{-}, \quad \forall j \\
&-R_{jr} \tilde{X}_{jr}^V \le d_{jrs} \le R_{jr} \tilde{X}_{jr}^V, \quad \forall j \\
&z_{1rs}, z_{2jrs} \in \{0,1\}, \quad \forall j \\
&y_{rs}^P, y_{rs}, u_s, w_s, \upsilon_{is}^F, \upsilon_{js}^V \ge 0, \quad \forall i, \forall j \\
&d_{jrs}^{+}, d_{jrs}^{-} \ge 0 \text{ as integers}, \quad \forall j
\end{aligned}
\qquad (۳)
$$

که در آن $\tilde{Y}_{ks} \in [\tilde{Y}_{ks}^L, \tilde{Y}_{ks}^U]$ خروجی واقعی و β_{jr}^V تولید نهایی که توسط مدل‌های (۱) و (۲) معین می‌شود و R_{jr} پارامتر که محدوده ورودی تنظیم می‌کند و متغیرهای u_s و w_s و υ_{is}^F و υ_{js}^V و υ_{os} ضرایب مربوط به خروجی، تقاضا، ورودی ثابت و ورودی متغیر و عرض از مبدأ است. d_{jrs} تغییرات روی ورودی متغیر است که از d_{jrs}^{+} و d_{jrs}^{-} به دست می‌آید.

$\tilde{y}_{rs} \in [\tilde{y}^{L}, \tilde{y}^{U}]$ و $\tilde{y}^{p}_{rs} \in [\tilde{y}^{pL}_{rs}, \tilde{y}^{PU}_{rs}]$ خروجی نهایی و خروجی جریمه شده و $\tilde{\theta}^{E} \in [\tilde{\theta}^{EL}, \tilde{\theta}^{EU}]$ اثربخشی می‌باشد.

جهت به دست آوردن کران پایین مدل (۳) با قرار دادن شرکت r تحت تقاضا s در بدترین حالت و بقیه شرکت‌ها در بهترین حالت مدل زیر حاصل خواهد شد (لازم به تذکر است که بهترین حالت در صورتی اتفاق می‌افتد که با کمترین ورودی، بیشترین خروجی تولید کند و توسط تقاضا واقعی شرکت r مصرف شود)

$$
\begin{aligned}
& Min \quad M\theta^{EL}_{rs} + \sum_{j=1}^{J} (d^{+}_{jrs} + d^{-}_{jrs}) \\
& s.t. \quad \theta^{EL}_{rs} = \sum_{i=1}^{I} \upsilon^{F}_{is} X^{FL}_{ir} + \sum_{j=1}^{J} \upsilon^{V}_{js} (X^{VL}_{jr} + d_{jrs}) + \\
& w_s D^{L}_{rs} + \upsilon_{os} \\
& u_s y^{P}_{rs} + w_s y^{P}_{rs} = 1 \\
& \sum_{i=1}^{I} \upsilon^{F}_{is} X^{FU}_{ik} + \sum_{j=1}^{J} \upsilon^{V}_{js} X^{VU}_{jk} - u_s Y^{L}_{ks} + \upsilon_{os} \ge 0, \ \forall k \backslash r \\
& \sum_{i=1}^{I} \upsilon^{F}_{is} X^{FL}_{ir} + \sum_{j=1}^{J} \upsilon^{V}_{js} (X^{VL}_{jr} + d_{jrs}) - u_s y^{P}_{rs} + \upsilon_{os} \ge 0 \\
& y^{P}_{rs} = [y_{rs} - \alpha_{rs}(D^{L}_{rs} - y_{rs})](1 - z_{1rs}) \\
& + [D^{L}_{rs} - \delta_{rs}(y_{rs} - D^{L}_{rs})] z_{1rs} + \varepsilon \\
& y_{rs} - D^{L}_{rs} < M z_{1rs} \\
& y_{rs} - D^{L}_{rs} \ge -M(1 - z_{1rs}) \\
& y_{rs} = Y^{L}_{r} + \sum_{j=1}^{J} \beta^{V}_{jr} d_{jrs} \\
& \beta^{V}_{jr} = \beta^{LV+}_{jr} z_{2jrs} + \beta^{LV-}_{jr} (1 - z_{2jrs}), \ \forall j \\
& d_{jrs} < M z_{2jrs}, \ \forall j \\
& d_{jrs} \ge -M(1 - z_{2jrs}), \ \forall j \\
& d_{jrs} = d^{+}_{jrs} - d^{-}_{jrs}, \ \forall j \\
& -R_{jr} X^{VL}_{jr} \le d_{jrs} \le R_{jr} X^{VL}_{jr}, \ \forall j \\
& z_{1rs}, z_{2jrs} \in \{0,1\}, \ \forall j \\
& y^{P}_{rs}, y_{rs}, u_s, w_s, \upsilon^{F}_{is}, \upsilon^{V}_{js} \ge 0, \ \forall i, \forall j \\
& d^{+}_{jrs}, d^{-}_{jrs} \ge 0 \text{ as integers}, \ \forall j
\end{aligned}
\qquad (۴)
$$

تابع هدف حاصلضرب کران پایین اثربخشی θ^{EL}_{rs} با عدد بزرگ M و دومین هدف حداقل سازی تغییرات در ورودی است و چهار قید اول محدودیت های پوششی هستند و ε یک عدد کوچک است تا شرکت بعد از اعمال تغییرات در خروجی و ورودی داخل مجموعه امکان تولید باقی بماند زمانی که $y^{p}_{rs} = 0$ است.

برای بدست آوردن کران بالا اثربخشی فرض کنید شرکت r تحت تقاضا s در بهترین حالت و بقیه شرکت‌ها در بدترین حالت باشند. مدل زیر حاصل خواهد شد:

$$
\begin{aligned}
& Min \quad M\theta^{EU}_{rs} + \sum_{j=1}^{J} (d^{+}_{jrs} + d^{-}_{jrs}) \\
& s.t. \quad \theta^{EU}_{rs} = \sum_{i=1}^{I} \upsilon^{F}_{is} X^{FU}_{ir} + \sum_{j=1}^{J} \upsilon^{V}_{js} (X^{VU}_{jr} + d_{jrs}) + \\
& w_s D^{U}_{rs} + \upsilon_{os} \\
& u_s y^{P}_{rs} + w_s y^{P}_{rs} = 1 \\
& \sum_{i=1}^{I} \upsilon^{F}_{is} X^{FL}_{ik} + \sum_{j=1}^{J} \upsilon^{V}_{js} X^{VL}_{jk} - u_s Y^{U}_{ks} + \upsilon_{os} \ge 0, \ \forall k \backslash r \\
& \sum_{i=1}^{I} \upsilon^{F}_{is} X^{FU}_{ir} + \sum_{j=1}^{J} \upsilon^{V}_{js} (X^{VU}_{jr} + d_{jrs}) - u_s y^{P}_{rs} + \upsilon_{os} \ge 0 \\
& y^{P}_{rs} = [y_{rs} - \alpha_{rs}(D^{U}_{rs} - y_{rs})](1 - z_{1rs}) \\
& + [D^{U}_{rs} - \delta_{rs}(y_{rs} - D^{U}_{rs})] z_{1rs} + \varepsilon \\
& y_{rs} - D^{U}_{rs} < M z_{1rs} \\
& y_{rs} - D^{U}_{rs} \ge -M(1 - z_{1rs}) \\
& y_{rs} = Y^{U}_{r} + \sum_{j=1}^{J} \beta^{V}_{jr} d_{jrs} \\
& \beta^{V}_{jr} = \beta^{UV+}_{jr} z_{2jrs} + \beta^{UV-}_{jr} (1 - z_{2jrs}), \ \forall j \\
& d_{jrs} < M z_{2jrs}, \ \forall j \\
& d_{jrs} \ge -M(1 - z_{2jrs}), \ \forall j \\
& d_{jrs} = d^{+}_{jrs} - d^{-}_{jrs}, \ \forall j \\
& -R_{jr} X^{VU}_{jr} \le d_{jrs} \le R_{jr} X^{VU}_{jr}, \ \forall j \\
& z_{1rs}, z_{2jrs} \in \{0,1\}, \ \forall j \\
& y^{P}_{rs}, y_{rs}, u_s, w_s, \upsilon^{F}_{is}, \upsilon^{V}_{js} \ge 0, \ \forall i, \forall j \\
& d^{+}_{jrs}, d^{-}_{jrs} \ge 0 \text{ as integers}, \ \forall j
\end{aligned}
\qquad (۵)
$$

حال باید نشان دهیم که مقدار اثربخشی شرکت r تحت تقاضا s بین کران پایین و کران بالای خود قرار دارد، بنابراین قضیه زیر را اثبات می‌کنیم:

قضیه ۱ – $\theta_{rs}^{EL} \le \tilde{\theta}_{rs}^{E} \le \theta_{rs}^{EU}$

اثبات– ابتدا ثابت می‌کنیم: $\theta_{rs}^{EL} \le \tilde{\theta}_{rs}^{E}$

بدین منظور فرض کنید:

$(\tilde{\theta}_{rs}^{E}, \tilde{z}_{1rs}, \tilde{\tilde{z}}_{2rs}, \tilde{d}_{rs}^{+}, \tilde{d}_{rs}^{-}, \tilde{y}_{rs}^{P}, \tilde{y}_{rs}, \tilde{u}_s, \tilde{w}_s, \tilde{\upsilon}_s^{F}, \tilde{\upsilon}_s^{V})$

جواب بهینه مدل (۳) و

$(\tilde{\theta}_{rs}^{EL}, \tilde{z}_{1rs}^{L}, \tilde{\tilde{z}}_{2rs}^{L}, \tilde{d}_{rs}^{+L}, \tilde{d}_{rs}^{-L}, \tilde{y}_{rs}^{PL}, \tilde{y}_{rs}^{L}, \tilde{u}_s^{L}, \tilde{w}_s^{L}, \tilde{\upsilon}_s^{FL}, \tilde{\upsilon}_s^{VL})$

جواب بهینه مدل (۴) باشد.

ثابت می‌کنیم:

$(\tilde{\theta}_{rs}^{E}, \tilde{z}_{1rs}, \tilde{\tilde{z}}_{2rs}, \tilde{d}_{rs}^{+}, \tilde{d}_{rs}^{-}, \tilde{y}_{rs}^{P}, \tilde{y}_{rs}, \tilde{u}_s, \tilde{w}_s, \tilde{\upsilon}_s^{F}, \tilde{\upsilon}_s^{V})$

یک جواب شدنی برای مدل (۴) است.

با جایگذاری

$(\tilde{\theta}_{rs}^{E}, \tilde{z}_{1rs}, \tilde{\tilde{z}}_{2rs}, \tilde{d}_{rs}^{+}, \tilde{d}_{rs}^{-}, \tilde{y}_{rs}^{P}, \tilde{y}_{rs}, \tilde{u}_s, \tilde{w}_s, \tilde{\upsilon}_s^{F}, \tilde{\upsilon}_s^{V})$

در اولین محدودیت مدل (۳) خواهیم داشت:

$$\tilde{\theta}_{rs}^{E} = \sum_{i=1}^{I} \tilde{\upsilon}_{is}^{F}\tilde{X}_{ir}^{F} + \sum_{j=1}^{J}\tilde{\upsilon}_{js}^{V}(\tilde{X}_{jr}^{V}+\tilde{d}_{jrs}) + \tilde{w}_s\tilde{D}_{rs} + \tilde{\upsilon}_{os}$$

حال چون به ازای هر (i=1,...,I) $\tilde{X}_{ir}^{F} \ge X_{ir}^{FL}$ و به ازای هر (j=1,...,J) $\tilde{X}_{jr}^{V} \ge X_{jr}^{VL}$ و $\tilde{D}_{rs} \ge D_{rs}^{L}$ داریم از نامساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{I} \tilde{\upsilon}_{is}^{F}\tilde{X}_{ir}^{F} + \sum_{j=1}^{J}\tilde{\upsilon}_{js}^{V}(\tilde{X}_{jr}^{V}+\tilde{d}_{jrs}) + \tilde{w}_s\tilde{D}_{rs} + \tilde{\upsilon}_{os} \ge$$
$$\sum_{i=1}^{I} \tilde{\upsilon}_{is}^{F}X_{ir}^{FL} + \sum_{j=1}^{J}\tilde{\upsilon}_{js}^{V}(X_{jr}^{VL}+\tilde{d}_{jrs}) + \tilde{w}_s D_{rs}^{L} + \tilde{\upsilon}_{os}$$

عبارت

$$\sum_{i=1}^{I} \tilde{\upsilon}_{is}^{F}X_{ir}^{FL} + \sum_{j=1}^{J}\tilde{\upsilon}_{js}^{V}(X_{jr}^{VL}+\tilde{d}_{jrs}) + \tilde{w}_s D_{rs}^{L} + \tilde{\upsilon}_{os}$$

را θ'^{E}_{rs} می‌نامیم. بنابراین خواهیم داشت: $\tilde{\theta}_{rs}^{E} > \theta'^{E}_{rs}$

از طرفی جواب بهینه مدل (۴) از جواب شدنی مدل (۴) کوچکتر است، اگر θ'^{E}_{rs} یک جواب شدنی مدل (۴) باشد بنابراین داریم: $\theta'^{E}_{rs} > \theta_{rs}^{EL}$، با توجه به رابطه $\tilde{\theta}_{rs}^{E} > \theta'^{E}_{rs}$ داریم:

$$\theta_{rs}^{EL} < \tilde{\theta}_{rs}^{E}$$

بنابراین

$(\tilde{\theta}_{rs}^{E}, \tilde{z}_{1rs}, \tilde{\tilde{z}}_{2rs}, \tilde{d}_{rs}^{+}, \tilde{d}_{rs}^{-}, \tilde{y}_{rs}^{P}, \tilde{y}_{rs}, \tilde{u}_s, \tilde{w}_s, \tilde{\upsilon}_s^{F}, \tilde{\upsilon}_s^{V})$

در اولین محدودیت مدل (۴) صدق می‌کند.

دومین محدودیت مدل (۳) همگی متغیر هستند، که در مدل (۳) برابر یک بوده بنابراین در مدل (۴) برابر یک است.

حال سومین محدودیت را در نظر گرفته: جواب بهینه

$(\tilde{\theta}_{rs}^{E}, \tilde{z}_{1rs}, \tilde{\tilde{z}}_{2rs}, \tilde{d}_{rs}^{+}, \tilde{d}_{rs}^{-}, \tilde{y}_{rs}^{P}, \tilde{y}_{rs}, \tilde{u}_s, \tilde{w}_s, \tilde{\upsilon}_s^{F}, \tilde{\upsilon}_s^{V})$

را در آن جایگزین می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{I}\tilde{\upsilon}_{is}^{F}\tilde{X}_{ik}^{F} + \sum_{j=1}^{J}\tilde{\upsilon}_{js}^{V}\tilde{X}_{jk}^{V} - \tilde{u}_s\tilde{Y}_{ks} + \tilde{\upsilon}_{os} \ge 0, \quad \forall k \backslash r$$

حال چون به ازای هر (i=1,...,I) $\tilde{X}_{ik}^{F} \le X_{ik}^{FU}$ و به ازای هر (j=1,...,J) $\tilde{X}_{jk}^{V} \le X_{jk}^{VU}$ و به ازای هر (k=1,...,K) $Y_{ks}^{L} \le \tilde{Y}_{ks}$ داریم، از نامساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{I}\tilde{\upsilon}_{is}^{F}X_{ik}^{FU} + \sum_{j=1}^{J}\tilde{\upsilon}_{js}^{V}X_{jk}^{VU} - \tilde{u}_s Y_{ks}^{L} + \tilde{\upsilon}_{os} \ge 0, \quad \forall k \backslash r$$

عبارت بالا نشان دهنده این است که جواب بهینه

$(\tilde{\theta}_{rs}^{E}, \tilde{z}_{1rs}, \tilde{\tilde{z}}_{2rs}, \tilde{d}_{rs}^{+}, \tilde{d}_{rs}^{-}, \tilde{y}_{rs}^{P}, \tilde{y}_{rs}, \tilde{u}_s, \tilde{w}_s, \tilde{\upsilon}_s^{F}, \tilde{\upsilon}_s^{V})$

در سومین محدودیت مدل (۴) صدق می کند.

به طور مشابه جواب بهینه

$(\tilde{\theta}_{rs}^{E}, \tilde{z}_{1rs}, \tilde{\tilde{z}}_{2rs}, \tilde{d}_{rs}^{+}, \tilde{d}_{rs}^{-}, \tilde{y}_{rs}^{P}, \tilde{y}_{rs}, \tilde{u}_s, \tilde{w}_s, \tilde{\upsilon}_s^{F}, \tilde{\upsilon}_s^{V})$

در بقیه محدودیت‌های مدل (۴) برقرار است.

اما در محدودیت $-R_{jr}X_{jr}^{V} \le d_{jrs} \le R_{jr}X_{jr}^{V}, \ \forall j$: جواب بهینه

$(\tilde{\theta}_{rs}^{E}, \tilde{z}_{1rs}, \tilde{\tilde{z}}_{2rs}, \tilde{d}_{rs}^{+}, \tilde{d}_{rs}^{-}, \tilde{y}_{rs}^{P}, \tilde{y}_{rs}, \tilde{u}_s, \tilde{w}_s, \tilde{\upsilon}_s^{F}, \tilde{\upsilon}_s^{V})$

را جایگزین می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$-R_{jr}\tilde{X}_{jr}^{V} \le d_{jrs} \le R_{jr}\tilde{X}_{jr}^{V}, \quad \forall j$$

از طرفی داریم: $d_{jrs} = \tilde{d}_{jrs}^{+} + \tilde{d}_{jrs}^{-}, \ \forall j$، بنابراین خواهیم داشت:

$$-R_{jr}\tilde{X}_{jr}^{V} \le \tilde{d}_{jrs}^{+} - \tilde{d}_{jrs}^{-} \le R_{jr}\tilde{X}_{jr}^{V}, \quad \forall j$$

حال اگر طرفین نامساوی بالا بر $\frac{\tilde{X}_{jr}^{V}}{X_{jr}^{VL}}$ تقسیم کنیم، و قرار دهیم $\frac{d_{jrs}}{\frac{\tilde{X}_{jr}^{V}}{X_{jr}^{VL}}} = d_{jrs}^{L}$ خواهیم داشت:

$$-R_{jr} X_{jr}^{VL} \le d_{jrs}^{L} \le R_{jr} X_{jr}^{VL}, \quad \forall j$$

بنابراین
$(\tilde{\theta}_{rs}^{E}, \tilde{z}_{1rs}, \tilde{z}_{2rs}, \tilde{d}_{rs}^{+}, \tilde{d}_{rs}^{-}, \tilde{y}_{rs}^{P}, \tilde{y}_{rs}, \tilde{u}_{s}, \tilde{w}_{s}, \tilde{\upsilon}_{s}^{F}, \tilde{\upsilon}_{s}^{V})$
یک جواب شدنی برای مدل (۴) است.
از طرفی طبق فرض داریم،
$(\tilde{\theta}_{rs}^{EL}, \tilde{z}_{1rs}^{L}, \tilde{z}_{2rs}^{L}, \tilde{d}_{rs}^{+L}, \tilde{d}_{rs}^{-L}, \tilde{y}_{rs}^{PL}, \tilde{y}_{rs}^{L}, \tilde{u}_{s}^{L}, \tilde{w}_{s}^{L}, \tilde{\upsilon}_{s}^{FL}, \tilde{\upsilon}_{s}^{VL})$
جواب بهینه مدل (۴) است. پس از مطالب اخیر نتیجه می‌شود، $\theta_{rs}^{EL} \le \tilde{\theta}_{rs}^{E}$ که نماینگر پایان اثبات قسمت اول است. حال قسمت دوم قضیه $\tilde{\theta}_{rs}^{E} \le \theta_{rs}^{EU}$، به طور مشابه برای تمامی محدودیت‌ها اثبات می‌شود.
حکم اثبات خواهد شد.

بخش ۴- مثال عددی

در این بخش یک مثال عددی برای اندازه‌گیری بازه‌ی اثربخشی بدون توسعه ظرفیت ($d_{jr} = 0$) نشان می‌دهد که $\alpha_k = 0$ و $\delta_k = 0$. جدول ۱ داده‌ها را برای ۵ شرکت که شامل یک ورودی ثابت و یک ورودی متغیر و خروجی واقعی و سه تقاضا با احتمال $\frac{1}{5}$ و $\frac{2}{5}$ و $\frac{2}{5}$ را نشان می‌دهد. برای اندازه‌گیری بازه‌ی کارایی از مدل‌های بازه‌ای رایج در DEA و برای اندازه‌گیری بازه‌ی اثربخشی از روش مبتنی بر سناریو با داده‌های بازه‌ای استفاده می‌شود. در این بخش برای نشان دادن میزان اثر بخشی از معکوس کارایی و اثر بخشی استفاده می‌کنیم.
جدول ۲ اندازه‌گیری‌های کارایی و اثر بخشی را با داده‌های بازه‌ای نشان می‌دهد که مقدار اثربخشی نامشخص است و بین کران پایین و کران بالا خود قرار دارد.

جدول ۱. داده‌های مثال عددی

شرکت‌ها	ورودی ثابت	ورودی متغیر	خروجی واقعی	تقاضا ۱	تقاضا۲	تقاضا۳
۱	[۱ , ۹]	[۲ , ۱۱]	[۵ , ۱۰]	[۳ , ۱۲]	[۴ , ۱۱]	[۷ , ۱۳]
۲	[۱.۱ , ۸]	[۳ , ۱۱]	[۴ , ۱۱]	[۳ , ۱۰]	[۶ , ۹]	[۷ , ۱۳]
۳	[۲ , ۷]	[۲.۲ , ۹]	[۳ , ۹]	[۵ , ۱۳]	[۶ , ۱۰]	[۸ , ۱۴]
۴	[۲.۵ , ۹]	[۱.۵ , ۸]	[۲ , ۱۰]	[۴ , ۱۱]	[۵ ,۱۲.۵]	[۷ ,۱۴]
۵	[۳ , ۱۰]	[۲.۲ ,۱۲]	[۱ , ۸]	[۲ , ۱۰]	[۳ , ۱۱]	[۵ , ۱۳]

جدول ۲. کارایی و اثربخشی

شرکت‌ها	کارایی	اثربخشی (تقاضا۱)	اثربخشی(تقاضا۲)	اثربخشی (تقاضا۳)
۱	[۰/۵۶ , ۱/۰۰]	[۰/۳۷۵ , ۰/۵۴۵]	[۰/۴۴۵ , ۰/۵۲۴]	[۰/۵۶۵ , ۰/۸۲۵]
۲	[۰/۴۳ , ۰/۷۷]	[۰/۴۲۹ , ۰/۸۲۹]	[۰/۴۵۰ , ۰/۶۰۰]	[۰/۵۴۲ , ۰/۷۳۶]
۳	[۰/۸۸ , ۱/۰۰]	[۰/۸۹۱ , ۱/۰۰۰]	[۰/۶۶۷ , ۰/۸۲۶]	[۰/۵۹۱ , ۰/۷۲۷]
۴	[۰/۷۵ , ۱/۰۰]	[۰/۵۲۴ , ۰/۶۶۷]	[۰/۵۵۶ , ۰/۷۷۹]	[۰/۴۲۳ , ۰/۶۸۳]
۵	[۰/۱۲۲ , ۰/۶۳]	[۰/۳۰۰ , ۰/۵۲۹]	[۰/۵۲۴ , ۰/۷۵۴]	[۰/۵۶۵ , ۰/۸۳۳]

همانطور که مشاهده می‌شود شرکت ۳ کارای ضعیف است اما تحت تقاضا ۱ اثربخش است یعنی این شرکت تلاش می‌کند تقاضا را تولید کند و سهم بازار را حفظ کند. که باعث درآمد بالا، ناشی از دست یابی به تقاضا مشتری می‌شود. شرکت ۱ کارای ضعیف است اما تحت تقاضا ۱ اثربخش نیست، این شرکت از منابع ورودی خود خوب استفاده کرده و تمرکز بر تولید داشته است، بنابراین شرکت ۱ باید سطح خروجی‌اش را کاهش دهد تا تقاضا مشتری را برطرف کند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، مقدار اثربخشی تحت تقاضا احتمالی با داده‌های بازه‌ایی اندازه‌گیری شده است، که مقدار اثربخشی نا مشخص بوده و بین کران پایین و کران بالا خود قرار گرفت. از مثال عددی بیان شده می‌توان نتیجه گرفت که یک شرکت ممکن کارا باشد ولی اثر بخش نباشد در این صورت باید سطح خروجی‌اش را به اندازه تقاضا کاهش دهد تا هزینه اضافی برای تولید خروجی صرف نشود و سهم بازار حفظ کند، از طرف دیگر یک شرکت ممکن کارا نباشد ولی اثربخش باشد در این صورت تقاضا مشتری برطرف شده است و هزینه اضافی برای تولید در نظر گرفته نمی‌شود. بنابراین روش بیان شده برای توصیف سیستم‌های تولید با داده‌های نامشخص و محصولات فاسد شدنی که نگهداری محصولات ممکن نیست یا هزینه اضافی دربرخواهد داشت، مناسب می‌باشد. مدلی با چندین خروجی برای تخمین کارایی و اثربخشی با تأثیرات تقاضا پیشنهاد می‌شود، هم چنین یک مدل با داده‌های فازی ارائه شود به طوری‌که بعضی از ورودی‌ها قابل تغییر باشند.

فهرست مراجع

Birg, J. R., & Louveaux, F. (2011). Introduction to stochastic programming (2nded). New York: Springer Verlag.

Hosseinzadeh Lotfi, F., & Navabakhsh, M., & Tehranian, A., (2007).
Ranking bank branches with interval data the application of DEA, International Mathematical Forum, 2, 429-440.

Lee, C. –Y., & Johnson, A.L., (2012). Effectiveness: A measure of demand effect in productivity analysis <http://ssrn.com/abstract=2070290>.

Lee, C. –Y., & Johnson, A.L., (2014). Proactive data envelopment analysis: Effective production and capacity expansion in stochastic environments. Operational Research 232, 537-548.

Luss, H. (1982). Operations research and capacity expansion problem: a survey. Operations Research, 30(5), 907-947.

Podinovski, V. V., & Forsund, F. R. (2010). Differential Characteristics of efficient frontiers in data envelopment analysis. Operations Research, 58(6), 1743-1754.

Stigler, G. (1939). Production and distribution in the short run. The Journal of Political Economy, 47(3), 305-327.

Wilson, T. A., & Eckstein, O. (1964). Short-run productivity behavior in US manufacturing. The Review of Economics and Statistics, 46(1), 41-54.