



مسیر بهینه وزن دار شده در گراف با شاخص‌های چندگانه

محمد نیکجو^۱، فرزاد رضائی بالف^{۲*}

(^۱) گروه ریاضیات، دانشکده فنی و حرفه‌ای امام محمد باقر (ع)، ساری، ایران

(^۲) گروه ریاضیات، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قائم شهر، قائم شهر، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۵/۱۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۰۸/۱۹

چکیده

در این مقاله تکنیکی ارائه خواهد شد که به کمک آن مسیرهای بهینه را در یک گراف با شاخص‌های چندگانه پیدا خواهد کرد. تا به حال تمام مسیرهای بهینه بر مبنای یک شاخص مثلاً فاصله تعیین می‌گردید که الگویی برای تعیین کوتاه‌ترین مسیر نیز برای آنها وجود دارد. در این مقاله هر یال دارای شاخص‌های چندگانه‌ای بوده که هر یک می‌توانند عاملی برای تعیین مسیر بهینه تلقی شوند. به کمک تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها، مدلی طراحی خواهیم نمود که بتواند مسیرهای بهینه با شاخص‌های چندگانه را تشخیص دهد و آنها را از سایر مسیرها جدا کند.

واژه‌های کلیدی: گراف، مسیر، تحلیل پوششی داده‌ها، محدودیت‌های وزنی.

۱. مقدمه

یافتن مسیره‌های بهینه در گراف از مهمترین مسائلی است که از بدو شروع تئوری گراف همواره مورد توجه محققین بوده است. مسیره‌های بهینه از ابتدا با مطرح کردن کوتاه‌ترین مسیر شکل گرفت. برای هر یال در گراف، وزنی را به عنوان فاصله در نظر گرفته و در نتیجه با جمع نمودن تمام فاصله یال‌های موجود در یک مسیر، طول مسیر محاسبه شده و از آنجا کوتاه‌ترین مسیر پیدا می‌شود. اگر برای یک یال بیش از یک شاخص مهم باشد، مثلاً فاصله بین دو سر یال و زمان طی شدن مسافت در آن یال، در این صورت چگونه می‌توان با ادغام، این دو عامل مسیر بهینه را یافت؟ چگونه می‌توان با ادغام کردن دو شاخص مانند مسافت و زمان شاخص جدیدی ساخت که بتوان از آن در جهت رتبه‌بندی مسیرها استفاده نمود. در حالت کلی اگر شاخص‌های چند گانه برای هر یک از یال‌ها داشته باشیم که هر یک از شاخص‌های آن مقداری معین را دارا می‌باشند، آنگاه به وسیله چه تکنیکی می‌توان مسیرها را رتبه‌بندی نمود، تا بهترین مسیر انتخاب گردد.

تحلیل پوششی داده‌ها در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز-کوپر و رودز [۱] به عنوان یک مدل ریاضی کارا در قلمرو تحقیق در عملیات برای ارزیابی کارایی سازمان‌ها مطرح گردید و سپس به وسیله بنکر، چارلز و کوپر توسعه داده شد [۲]. از آن زمان تاکنون، هزاران مقاله در این خصوص در جهان ارائه شده است و مدل‌های مختلف و متنوعی برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس به وجود آمده است. این علم که روشی غیر پارامتری برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده است، با در نظر گرفتن تقریبی از تابع تولید به محاسبه کارایی می‌پردازد. تابع تولید، تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها، ماکزیمم خروجی را نشان می‌دهد. اما در اکثر موارد به دلیل پیچیدگی فرآیند تولید، تغییر در تکنولوژی تولید و چند مقداره بودن داده‌ها، تابع تولید به سادگی

قابل محاسبه نیست. لذا تقریبی از این تابع را در نظر می‌گیریم. تقریب تابع تولید به دو روش پارامتری و غیر پارامتری امکان‌پذیر می‌باشد. از آن جا که در روش پارامتری مشکلات فراوانی وجود داشت، در سال ۱۹۵۷ میلادی، فارل روشی غیرپارامتری را برای تقریب تابع تولید پیشنهاد کرد و در نهایت چارنز-کوپر و رودز مقاله‌ای را منتشر کرد که اساس علم تحلیل پوششی داده‌ها گردید [۳].

ساختار مقاله به شرح زیر می‌باشد: بخش دوم به مسیره‌های چندگانه می‌پردازد. در بخش سوم تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد. مسیر بهینه در گراف با شاخص‌های چند گانه در بخش چهارم پیشنهاد می‌گردد و حل یک مثال عددی در بخش پنجم و نتیجه‌گیری در بخش آخر ارائه می‌شود.

۲. مسیره‌های چندگانه

در این قسمت به بیان مسیره‌های چندگانه می‌پردازیم. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید که یک مساله کار بردی است. فرض کنید شخصی می‌خواهد از شهر تهران به شهر چالوس سفر کند، برای انجام این سفر می‌تواند از چهار مسیر مختلف خود را به مقصد برساند که این مسیره‌ها عبارتند از:

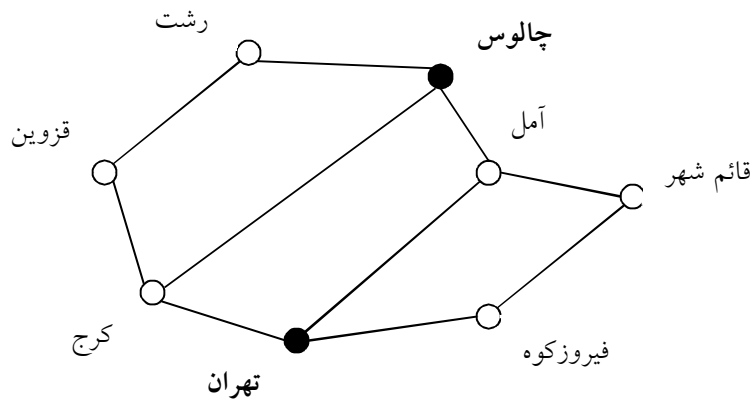
مسیر اول: مسیر زمینی تهران - کرج - چالوس (جاده کندوان)

مسیر دوم: مسیر زمینی تهران - کرج - قزوین - رشت - چالوس (جاده رشت)

مسیر سوم: مسیر زمینی تهران - آمل - چالوس (جاده هراز)

مسیر چهارم: مسیر زمینی تهران - فیروز کوه - قائم شهر - آمل - چالوس (جاده فیروز کوه)

گراف آن به صورت زیر می‌باشد.



شکل ۱. گراف ارتباط بین شهرها

حال سوال منطقی که مطرح می‌شود این است، کدام مسیر بر مسیرهای دیگر ارجحیت دارد و به‌عنوان مسیر بهینه انتخاب می‌گردد.

در این مقاله به کمک تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها به سوال فوق پاسخ داده‌ایم. این تکنیک بر پایه برنامه‌ریزی خطی پایه‌ریزی شده است و جهت محاسبه کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده به‌وجود آمده و به کار گرفته می‌شود.

۳. تحلیل پوششی داده‌ها

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده موجود است که هر یک از m ورودی مختلف جهت تولید s خروجی مختلف استفاده میکنند، همچنین فرض کنید بردارهای $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ و $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$ به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی واحد تصمیم‌گیرنده j ام باشد. که $x_j \geq 0, y_j \geq 0, x_j \neq 0, y_j \neq 0$. کارایی نسبی واحد تصمیم‌گیرنده j ام از حل مساله زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq \theta x_p, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y_p, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

فرض کنید در هر مسیر شاخص‌های مهم عبارتند از: طول مسیر، زمان مسیر، هزینه مسیر، زیبای مسیر و ایمنی مسیر

بنابراین پنج شاخص مختلف برای انتخاب یک یا چند مسیر بهینه موجود است که با توجه به مقدار این عوامل برای هر مسیر باید، مسیر بهینه انتخاب می‌گردد. بنابراین برای هر مسیر یک بردار با پنج مولفه موجود است که هر مولفه مجموع شاخص متناظر یال‌های موجود در این مسیر می‌باشد. توجه داشته باشید که بعضی از این شاخص‌ها مثبت و برخی دیگر نیز شاخص منفی می‌باشند. شاخص مثبت به شاخصی گفته می‌شود که هرچه مقدار آن بیشتر باشد، مطلوب‌تر است و شاخص منفی به شاخصی گفته می‌شود که هرچه مقدار آن کمتر باشد، مطلوب‌تر است. در بین شاخص‌های موثر در انتخاب مسیر ایمنی و زیبای سفر هر چه مقداری بیشتر داشته باشید مطلوب‌تر و شاخص‌های طول، زمان و هزینه مسیر هر چه مقداری کمتر داشته باشد مطلوب‌تر خواهند بود. همچنین بهبود برخی از شاخص‌ها باعث بدتر شدن وضعیت برخی دیگر از شاخص‌ها خواهد شد. مثلاً جاده کندوان به دلیل کوهستانی و سرسبز بودن منطقه بسیار زیبا می‌باشد ولی به دلیل کوهستانی بودن دارای امنیت پایین و زمان سفر طولانی است که مطلوب ما نخواهد بود.

۴. مسیر بهینه در گراف

فرض کنید G یک گراف باشد و p_1, \dots, p_n تمام مسیرهای مختلف از گره مبدا به گره مقصد باشد. هر مسیر p_j از تعدادی یال تشکیل شده است، فرض کنید $e_{j_1}, \dots, e_{j_{l_j}}$ تمام یال‌های موجود در مسیر p_j باشد.

هر یال e_{j_k} دارای m شاخص $x_{1j_k}, \dots, x_{mj_k}$ می‌باشد که مقدار هر شاخص در هر یال نامنفی است. شاخص i ام مسیر j ام از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{l_j} x_{ij_k}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

قرار می‌دهیم $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{mj})$. فرض کنید شاخص‌های $1, \dots, m_1$ ($1 \leq m_1 \leq m$) از نوع شاخص‌های هزینه و شاخص‌های $m_1 + 1, \dots, m$ از نوع شاخص‌های سود باشند. یادآور می‌شویم که شاخص‌های هزینه، شاخص‌هایی هستند که کمتر بودن آن مطلوب ما خواهد بود و شاخص‌های سود شاخص‌هایی هستند که افزایش آنها مدنظر است. به عبارت دیگر مسیر یا مسیری که دارای شاخص‌های هزینه کمتر و شاخص‌های سود بیشتر باشند بهترین خواهد بود.

تعریف: مسیر p_j بهتر از مسیر p_l می‌باشد اگر و فقط اگر

$$\begin{aligned} (-y_{1j}, \dots, -y_{m_1j}, y_{m_1+1,j}, \dots, y_{mj}) \geq_{\neq} \\ (-y_{1l}, \dots, -y_{m_1l}, y_{m_1+1,l}, \dots, y_{ml}) \end{aligned}$$

نکته. اگر مسیر p_j بهتر از مسیر p_l باشد در این صورت گویند بر مسیر p_l را غالب است، بنابراین هدف یافتن یک مسیری است که توسط هیچ مسیر دیگری مغلوب نشود. برای این منظور مسیر j ام را به عنوان واحد تصمیم گیرنده j ام در نظر بگیرید به عبارت دیگر واحد تصمیم گیرنده j ام را مسیر j ام بنامید. شاخص‌های هزینه اول لغایت (m_1) ام را ورودی و شاخص‌های سود $(m_1 + 1)$ ام لغایت m ام را خروجی می‌نامیم. از آنجا مسیر p_j یک مسیر بهینه است اگر و

مدل (۱) به مدل GCR با ماهیت ورودی معروف می‌باشد. θ^* را مقدار کارایی واحد تصمیم‌گیرنده p ام می‌نامند، اگر $\theta^* = I$ ، آنگاه واحد تحت ارزیابی را کارایی نسبی گویند. دوال مدل (۱) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \max z_p &= \sum_{r=1}^s u_r y_{rp} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{ip} = I, \\ & u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s \\ & v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2)$$

مدل (۲) به مدل مضربی معروف است. v_i و u_r به ترتیب وزن‌ها و اهمیت‌های خروجی r ام و ورودی i ام در ارزیابی واحد تصمیم‌گیرنده p ام می‌باشد که می‌تواند توسط مدیر تحت کنترل در آید. به عبارت دیگر مدیر می‌تواند نظرات خود را به صورت شرایط روی وزن‌های v_i و u_r اعمال نماید. برای این منظور باید به او کمک نمائیم تا روابط ریاضی بین وزن‌های ورودی (خروجی) را اعلام کند. به این نوع روابط ریاضی محدودیت‌های وزنی می‌گویند. محدودیت‌هایی که می‌تواند در صورت نیاز به مدل (۲) افزوده گردد به صورت زیر می‌باشند.

$$A v \leq d, \quad B u \leq c$$

(۱) اعمال محدودیت‌های وزنی به مدل‌های مضربی تحلیل پوششی داده‌ها باعث محدود شدن حرکت وزن‌ها و بردارهای نرمال ابر صفحه‌های کارا می‌شود و در نتیجه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده بهتر نخواهد شد. محدودیت‌های وزنی می‌تواند به صورت زیر ارایه شود.

(۲) اگر d و c بردارهای صفر باشند در این صورت محدودیت‌های وزنی فوق را همگن، در غیر این صورت آنها را غیر همگن می‌نامند. اضافه کردن محدودیت‌های وزنی همگن هیچ مشکلی را برای مدل‌های مضربی به وجود نمی‌آورند.

۵. مثال عددی

مجدداً مثال بخش دوم را در نظر بگیرید. هدف مسافرت از شهر تهران که آن را شهر ۱ می‌نامیم به شهر چالوس است که آن را شهر ۵ می‌نامیم. مسیرهای موجود بین این دو شهر عبارتند از:

$$p_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4), \quad p_2 = (e_1, e_5),$$

$$p_3 = (e_7, e_6), \quad p_4 = (e_8, e_9, e_{10}, e_6)$$

بدیهی است که شاخص‌های طول، زمان و هزینه هر چه کمتر باشند مطلوب‌تر می‌باشند، لذا این شاخص‌ها، شاخص‌های هزینه‌اند و به‌عنوان ورودی واحد تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته می‌شوند. همچنین شاخص‌های زیبایی و ایمنی که بیشتر بودن آنها مطلوب ما خواهد بود بعنوان شاخص‌های سود و یا خروجی آن واحد می‌باشند. مقادیر این شاخص‌ها بین هر دو شهر (یال) در جدول ۱ ارائه شده است.

فقط اگر واحد تصمیم‌گیرنده z ام کارای نسبی باشد، بنابراین باید به دنباله تکنیکی برای یافتن واحدهای تصمیم‌گیرنده کارای نسبی باشیم. مدل (۳) به همراه کنترل وزن برای ارزیابی مسیر p_o بصورت زیر پیشنهاد می‌گردد.

$$\max \sum_{r=m_I+1}^m u_r y_{ro}$$

$$s.t. \sum_{r=m_I+1}^m u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m_I} v_i y_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m_I} v_i y_{io} = 1,$$

$$Au \leq 0, \tag{۳}$$

$$Bv \leq 0,$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = m_I + 1, \dots, m$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m_I.$$

که در آن ماتریس‌های A و B اهمیت‌های نسبی وزن‌های شاخص‌های سود و هزینه می‌باشند و از طرف مدیر اعلام می‌شود.

جدول ۱. مقادیر شاخص‌های یال‌ها

یال	طول (km)	زمان (h)	هزینه (تومان)	زیبایی	ایمنی
e_1	50	1	100	20	18
e_2	120	2	1200	22	20
e_3	200	3	1500	17	21
e_4	200	3	1700	10	27
e_5	150	3	1800	8	23
e_6	100	1.5	1200	15	18
e_7	200	4	1400	16	17
e_8	120	2.5	1000	20	12
e_9	120	2	1100	18	18
e_{10}	90	1.5	1800	12	18

مجموع طول، زمان، هزینه، زیبایی و ایمنی هر مسیر عبارتست از:

جدول ۲. مقادیر شاخص‌های هر یک از مسیرها

ایمنی	زیبایی	(تومان) هزینه	زمان (h)	طول (km)	یال‌ها
o_1	y_{4j}	I_3	I_2	I_1	DMU_s
o_2	y_{5j}	y_{3j}	y_{2j}	y_{1j}	
86	67	5400	9	570	p_1
41	28	2800	4	200	p_2
35	31	2600	5.5	300	p_3
66	65	5100	7.5	420	p_4

بنابراین مدل ارزیابی برای محاسبه عملکرد واحد تصمیم گیرنده t - ام به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \max \quad & u_4 y_{4t} + u_5 y_{5t} \\ \text{s.t.} \quad & u_4 y_{41} + u_5 y_{51} - v_1 x_{11} - v_2 x_{21} - v_3 x_{31} \leq 0, \\ & u_4 y_{42} + u_5 y_{52} - v_1 x_{12} - v_2 x_{22} - v_3 x_{32} \leq 0, \\ & u_4 y_{43} + u_5 y_{53} - v_1 x_{13} - v_2 x_{23} - v_3 x_{33} \leq 0, \\ & u_4 y_{44} + u_5 y_{54} - v_1 x_{14} - v_2 x_{24} - v_3 x_{34} \leq 0, \\ & v_1 x_{1t} + v_2 x_{2t} + v_3 x_{3t} = 1, \\ & v_3 \geq 2v_2, \quad v_2 \geq 3v_1, \quad u_5 \geq 3u_4, \\ & v_1, v_2, v_3, u_4, u_5 \geq \varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

با حل مساله فوق به ازای $t=1,2,3,4$ نتایج زیر حاصل می‌شود.

هدف اولویت‌بندی مسیرها می‌باشد. به عبارت دیگر به دنبال مسیری هستیم که با توجه به پنج شاخص طول، زمان، هزینه، زیبایی و ایمنی از سایر مسیرها بهتر باشد. برای این منظور مدل‌های ارزیابی تحلیل پوششی داده‌ها را برای ارزیابی چهار واحد تصمیم‌گیرنده (چهار مسیر) به کار می‌بریم.

فرض کنید فردی می‌خواهد خود را از مبدا به مقصد برساند، برای مسیرهای موجود، شاخص‌هایی در نظر گرفته شده که دارای اهمیت‌های یکسان نمی‌باشند. به‌عنوان مثال می‌توان فرض کرد، اهمیت شاخص هزینه بیش از اهمیت شاخص‌های دیگر است. به عبارت دیگر فرض کنید فرد مذکور روابط بین اهمیت شاخص‌ها را به صورت زیر بیان کرده باشد.

(اهمیت شاخص زمان) ≥ 2 اهمیت شاخص هزینه

(اهمیت شاخص طول) ≥ 3 اهمیت شاخص زمان

(اهمیت شاخص زیبایی) ≥ 3 اهمیت شاخص ایمنی

جدول ۳. مقادیر کارایی مسیرها

DMU_s	p_1	p_2	p_3	p_4
کارایی	1	0.99	0.87	0.92

می‌گردد. اگر در ارزیابی مسیرهای موجود، بیش از یک مسیر کارا شناسایی شود، در این صورت با بکار بردن مدل‌های رتبه‌بندی می‌توان آنها را رتبه‌بندی نمود [۳]، [۴]، [۵]، [۶] مدل رتبه‌بندی متناظر مدل (۳) به صورت زیر می‌باشد.

با توجه به جدول ۳، مشاهده می‌شود، مقدار کارایی مسیرهای اول لغایت چهارم به ترتیب 1, 0.99, 0.87 و 0.9 می‌باشد، که نشان می‌دهد مسیر اول کارا و سایر مسیرها با توجه به اهمیت شاخص‌ها و کنترل وزن‌ها ناکارا می‌باشند، از این رو با توجه به شاخص‌های در نظر گرفته شده مسیر p_1 به‌عنوان مسیر بهینه انتخاب

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{r=m_1+1}^m u_r y_{r0} \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_{r=m_1+1}^m u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m_1} v_i y_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq 0, \\
 & \sum_{i=1}^{m_1} v_i y_{i0} = 1, \\
 & Au \leq 0, \quad Bv \leq 0, \\
 & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m_1, \quad r = m_1 + 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{5}$$

مدل (5) به نام مدل رتبه‌بندی با کنترل وزن معروف است. در این مدل با حذف محدودیت نظیر واحد کارایی تحت ارزیابی (حذف قید 0 - ام $0 \in \{1, \dots, n\}$)، مقدار تابع هدف بدست می‌آید. هر واحدی مقدار تابع هدف بالاتری داشته باشد، رتبه بهتری خواهد داشت.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به کمک تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها مسیر بهینه یک گراف با شاخص‌های چندگانه را یافتیم. این مسیر بهینه، مسیری است که مغلوب هیچ مسیر دیگری نشود. این مسیر بهینه با اعمال کنترل وزن که معادل قرار دادن اهمیت نسبی روی شاخص‌ها می‌باشد، به دست می‌آید. قبلاً تمام الگوریتم‌های موجود برای یافتن یک مسیر بهینه وقتی به کار می‌رود که برای هر یال یک شاخص برای ارزیابی داشته باشیم. این شاخص فقط می‌توانست طول و مسافت یک یال یا زمان در یک یال و یا امثال هم باشد که توسط الگوریتم‌هایی مانند کوتاه‌ترین مسیر می‌توان مسیر بهینه را یافت.

فهرست منابع

4. G. R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, N. Shoja, G. Tohidi, S. Razavian "Ranking by Using L1 -Norm in Data Envelopment Analysis", *Applied Mathematics and Computations*, 153, 1, pp. 215-224, 2004.
5. G. R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, F. Rezai Balf and H. Zhiani Rezai, 2004. "Using Monte Carlo method for ranking efficient units". *Applied Mathematics and Computation*, 162, pp. 371-379, 2005.
6. T. Sueyoshi, "DEA nonparametric ranking test and index measurement: Slack-adjusted DEA and an application to Japanese agriculture cooperatives" *International Journal of Management Science*, 27, pp. 315-326, 1999.
1. A. Charnes, W. W. Cooper, E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 2, (6), pp. 429_444, 1978.
2. R. D. Banker, A. Charnes, W. W. Cooper, Some model for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, *Management Science* 30, pp. 1078_1092, 1984.
3. P. Andersen, and N. C. Petersen "A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis", *Management Science*, 39, pp. 1261-1264, 1993.