دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

یک روش نقطه درونی نشدنی با گام کامل NT با پیچیدگی $O(n)$ برای حاصل‌ضرب دکارتی $P_*(k)$ − HLCP روی مخروط‌های متقارن با استفاده از تحدب نمایی

بهروز خیرفام[۱*]، معصومه حقیقی[۲]

[۱ و ۲] گروه ریاضی کاربردی (بهینه سازی)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۸/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۱۲

چکیده

در این مقاله، با استفاده از خاصیت تحدب نمایی یک تابع مانع، یک روش نقطه درونی نشدنی را برای مساله حاصل‌ضرب دکارتی مکملی خطی افقی روی مخروط‌های متقارن $P_*(\kappa)$ ارایه می‌دهیم. در این روش، از گام‌های کامل نسترو–تاد استفاده کرده و نشان می‌دهیم که الگوریتم منظور شده خوش تعریف است. کران تکرار الگوریتم با بهترین کران تکرار شناخته شده برای مسایل حاصل‌ضرب دکارتی مکملی خطی افقی روی مخروط‌های متقارن $P_*(\kappa)$ منطبق است. هزینه اجرای یک تکرار $O(n^3)$ عملیات حسابی است.

واژه‌های کلیدی: مساله مکملی خطی افقی، حاصل‌ضرب دکارتی $P_*(\kappa)$، روش نقطه درونی نشدنی، پیچیدگی چندجمله‌ای، مخروط متقارن.

*عهده‌دار مکاتبات: Email: b.kheirfam@azaruniv.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، تحولات چشمگیری در الگوریتم‌های ارایه شده برای حل مسایل بهینه‌سازی رخ داده است که منجر به حل سریع این مسایل شده است. یکی از عوامل ایجاد این تحول به کار بردن روش‌های نقطه درونی است. دانتزیک در سال ۱۹۴۷ [۱] روش سادک را برای حل مسایل بهینه سازی خطی (LO) ارایه داد. در سال ۱۹۷۲، کلی و منتی [۲] با ارایه یک مثال نشان دادند که روش سادک در بدترین حالت پیچیدگی نمایی دارد. بنابراین، جستجو برای یافتن الگوریتم‌هایی با خواص نظری بهتر آغاز شد. در سال ۱۹۷۹، خاچیان[۳] یک الگوریتم زمان-چندجمله‌ای برای حل LO ارایه داد. در سال ۱۹۸۴، کارمارکار[۴] یک الگوریتم زمان-چندجمله‌ای با کران پیچیدگی بهتر از الگوریتم خاچیان ارایه داد که در عمل هم نسبت به الگوریتم خاچیان کاراتر بود. این روش‌ها اکنون به روش‌های نقطه درونی (IPMs) مشهور هستند. روش‌های نقطه درونی را می‌توان به روش‌های شدنی و نشدنی ($IIPMs$) تقسیم‌بندی کرد. در IPM های شدنی، الگوریتم با یک نقطه درونی شدنی اکید شروع و شدنی بودن در خلال حل مساله حفظ می‌شود. در $IIPMs$، الگوریتم با یک نقطه مثبت دلخواه شروع و شدنی بودن در حین نزدیک شدن به جواب بهینه ایجاد می‌شود. اولین نتیجه نظری برای $IIPM$ ها توسط کوجیما و همکاران[۵] که همگرایی سراسری روش اولیه-دوگان را ثابت کردند، به دست آمد.

مساله حاصل‌ضرب دکارتی مکملی خطی افقی روی مخروط متقارن $P_*(\kappa)$ (حاصل‌ضرب دکارتی $P_*(\kappa)$ -SCHLCP) یک تعمیم مساله $P_*(\kappa)$ -HLCP است که شامل مسایل $P_*(\kappa)$ - LCP و $P_*(0)$- LCP است. همچنین، $P_*(\kappa)$ -SCHLCP شامل یک دسته خاص $P_*(\kappa)$ -SCLCP است. $P_*(\kappa)$- LCP اولین بار توسط کوجیما و همکاران[۶] معرفی شد. آنها وجود و یکتایی مسیر مرکزی را اثبات کردند و یک چارچوب یکنواخت از IPMs را برای $P_*(\kappa)$ -LCP تحلیل کردند. گورتونا و همکاران[۷] یک دسته از IPMs پیشگو-اصلاح گر را برای $P_*(\kappa)$ -HLCP ارایه دادند. خیرفام[۸] یک الگوریتم پیشگو-اصلاح گر برای $P_*(\kappa)$-HLCP بر اساس یک جهت جستجوی جدید ارایه داد.

خاصیت حاصل‌ضرب دکارتی $P_*(\kappa)$ اولین بار توسط لئو و چیو [۹] برای LCP روی مخروط‌های متقارن با استفاده از ابزار جبر جردن اقلیدسی ارایه شد. آنها الگوریتم‌های تعقیب مسیر برای بهینه‌سازی متقارن (SO) ارایه شده توسط اشمیتا و علیزاده[۱۰] را به مساله حاصل‌ضرب دکارتی $P_*(\kappa)$-SCLCP تعمیم دادند. خیرفام[۱۱] یک IPM با گام نسترو-تاد (NT) کامل را برای مساله حاصل‌ضرب دکارتی-$P_*(\kappa)$ SCLCP ارایه داد که دارای پیچیدگی تکرار $O((1+2\kappa)\sqrt{r}\log\frac{r}{\varepsilon})$ است. اخیرا، وانگ و همکاران[۱۲] یک IPM شدنی با گام کامل نیوتن را برای LO بر اساس یک تابع هسته ارایه دادند که در آن از خاصیت تحدب نمایی برای تحلیل الگوریتم استفاده شده است.

توابع هسته نقش مهمی را در تحلیل پیچیدگی IPMs شدنی ایفا می‌کنند، زیرا تابع هسته هم برای تعیین جهت‌های جستجو و هم برای اندازه‌گیری فاصله بین نقطه داده شده و μ-مرکز استفاده می‌شود. این استراتژی اولین بار توسط پنگ و همکاران[۱۳] برای IPMs اولیه-دوگان بر اساس یک دسته از توابع هسته‌ی خود-منظم برای LO و بهینه‌سازی نیمه‌معین (SDO) ارایه شد و بهترین کران‌های تکرار شناخته شده برای روش‌های به هنگام‌سازی- بزرگ و به هنگام‌سازی- کوچک را به دست آوردند. وانگ و بای[۱۴] یک تابع هسته‌ی واجد شرایط را برای مساله حاصل‌ضرب دکارتی $P_*(\kappa)$ SCLCP- استفاده و بهترین کران تکرار را برای IPMs شدنی به دست آوردند. لساجا و همکاران[۱۵] بر اساس یک تابع هسته واجد شرایط یک IPM برای مساله حاصل‌ضرب دکارتی-$P_*(\kappa)$ SCLCP ارایه دادند. خیرفام [۱۶] یک IPM برای SCLCP بر اساس یک تابع هسته‌ی جدید ارایه داد.

همه‌ی الگوریتم‌های مذکور، برای شروع نیازمند یک نقطه شدنی اکید معلوم می‌باشند. چون پیدا کردن چنین نقطه‌ای آسان نیست، IIPMs پیشنهاد شده است. روس [۱۷] یک IIPM با گام کامل نیوتن برای LO ارایه داد که از یک گام شدنی و چند گام (حداکثر سه گام) مرکزی در هر تکرار استفاده می‌کند. خیرفام با استفاده از یک اندازه‌ی نزدیکی متفاوت [۱۸] الگوریتم روس برای LO را به $P_*(\kappa)$-HLCP تعمیم داد. روس در[۱۹] یک نسخه‌ی بهبودیافته از الگوریتم در [۱۷] را ارایه داد که برای به دست آوردن نقطه جدید از گام مرکزی استفاده نمی‌کند. در سال‌های اخیر، خیرفام[۲۰، ۲۱] الگوریتم اخیر روس را به مسایل حاصل‌ضرب دکارتی-$P_*(\kappa)$ SCLCP و $P_*(\kappa)$ -HLCP تعمیم داد.

با انگیزه گرفتن از روش‌های IIPM مذکور، در این مقاله یک IIPM با گام کامل NT برای مساله حاصل‌ضرب دکارتی$P_*(\kappa)$-SCHLCP بر اساس خاصیت تحدب نمایی ارایه کرده و نشان می‌دهیم که پیچیدگی به دست آمده با بهترین کران تکرار شناخته شده IIPMs برای مساله حاصل‌ضرب دکارتی $P_*(\kappa)$-SCHLCP منطبق است.

بقیه مطالب به شرح زیر تنظیم شده است. در بخش ۲، برخی از نتایج جبر جردن اقلیدسی مورد نیاز در این مقاله را یادآوری می‌کنیم. در بخش۳، مساله پریشیده و الگوریتم را شرح می‌دهیم. در بخش۴، برخی از خواص تابع هسته که در تحلیل الگوریتم نیاز است را مرور می‌کنیم. سپس به تحلیل الگوریتم پرداخته و کران پیچیدگی را برای الگوریتم به دست می‌آوریم. در نهایت، در بخش ۵ نتیجه‌گیری می‌کنیم.

۲- جبر جردن اقلیدسی

اینجا، فرض می‌کنیم که خواننده با مفاهیم اساسی جبر جردن اقلیدسی و مخروط‌های متقارن آشنا است. برای مطالعه بیشتر، خواننده به کتاب فاروت و کرانیی [۲۲] ارجاع می‌شود.

یک جبر جردن اقلیدسی $(\mathsf{J},\circ)$، یک فضای برداری با بعد متناهی روی R است که به نگاشت دو خطی

$(x,y)\to x\circ y$ از $\mathsf{J}\times\mathsf{J}$ به J و ضرب داخلی استاندارد $\langle x,s\rangle = tr(x\circ s)$ مجهز شده است. یک عنصر $e\in\mathsf{J}$ یک عنصر همانی نامیده می‌شود اگر به ازای هر x در J داشته باشیم $x\circ e = e\circ x = x$.
در جبر جردن J، مجموعه‌ی مربعات $\mathsf{K} := \{x^2 := x\circ x : x\in\mathsf{J}\}$ یک مخروط متقارن است. به ازای $x\in\mathsf{J}$، تبدیل لیاپونوف L با $L(x)s = x\circ s$ و نمایش مرتبه دوم P با $P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2)$ تعریف می‌شود که در آن $L(x)^2 = L(x)L(x)$. حالت کلی این تعاریف و مفاهیم به عنوان حاصل‌ضرب دکارتی جبرهای جردن اقلیدسی J_j و حاصل‌ضرب دکارتی مخروط‌های متقارن K_j، $j=1,2,\ldots,N$، معلوم هستند، یعنی $\mathsf{K}=\mathsf{K}_1\times\cdots\times\mathsf{K}_N$ و $\mathsf{J}=\mathsf{J}_1\times\cdots\times\mathsf{J}_N$. با توجه به این مفاهیم، حاصل‌ضرب دکارتی جبر جردن اقلیدسی $(\mathsf{J},\circ)$ دارای بعد $n = n_1+\cdots+n_N$ و رتبه $r = r_1+\cdots+r_N$ است که در آن عملگر $\circ$ به صورت

$$x\circ s = (x^{(1)}\circ s^{(1)},\ldots,x^{(N)}\circ s^{(N)}),$$
$$\langle x,s\rangle = \sum_{j=1}^{N}\langle x^{(j)},s^{(j)}\rangle$$

تعریف می‌شود. فرض کنید $e^{(j)}$ عنصر همانی جبر جردن $(\mathsf{J}_j,\circ)$ است، در این صورت $e=(e^{(1)},\ldots,e^{(N)})$ عنصر همانی حاصل‌ضرب دکارتی جبر جردن اقلیدسی $(\mathsf{J},\circ)$ است. به علاوه،

$$L(x) = \mathrm{d}iag(L(x^{(1)}),\ldots,L(x^{(N)})),$$
$$P(x) = \mathrm{d}iag(P(x^{(1)}),\ldots,P(x^{(N)})).$$

به ازای هر $x,s\in \mathrm{i}nt\mathsf{K}$ (که در آن $\mathrm{i}nt\mathsf{K}$ درون مخروط K را مشخص می‌کند) نقطه‌ی مقیاسی متناظر به صورت $w=(w^{(1)},\ldots,w^{(N)})$ تعریف می‌شود

که $w^{(j)}$ نقطه‌ی مقیاسی متناظر با $x^{(j)}, s^{(j)} \in \mathrm{int}\mathsf{K}_j$، برای $j=1,\ldots,N$ است.

به ازای هر x در جبر جردن $(\mathsf{J},\circ)$ نرم فروبنیوس و اثر x به صورت:

$$\| x \|_F^2 = \sum_{j=1}^{N} \| x^{(j)} \|_F^2 ,$$

$$tr(x) = \sum_{j=1}^{N} tr(x^{(j)}),$$

تعریف می‌شود که در آن،

$$\| x^{(j)} \|_F^2 = tr((x^{(j)})^2) = \lambda_1^2(x^{(j)}) + \cdots + \lambda_{r_j}^2(x^{(j)})$$

و r_j رتبه‌ی J_j و $\lambda_i(x^{(j)})$ iمین مقدار ویژه‌ی $x^{(j)}$است. همچنین، مقادیر ویژه‌ی مینیمم و ماکزیمم x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_{\min}(x) = \min_{1\le j\le N} \{\lambda_{\min}(x^{(j)})\},$$

$$\lambda_{\max}(x) = \max_{1\le j\le N} \{\lambda_{\max}(x^{(j)})\},$$

که در آن $\lambda_{\min}(x^{(j)})$ و $\lambda_{\max}(x^{(j)})$ به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی $x^{(j)}$ هستند. لم زیر یک نتیجه مهم و کلیدی می‌باشد که در تحلیل الگوریتم استفاده شده است.

لم۲.۱. (لم ۲.۳ در [۲۳]) فرض کنید که $x, s \in \mathrm{int}\mathsf{K}$ در این صورت، $w \in \mathrm{int}\mathsf{K}$ یکتا وجود دارد به طوری که $x = P(w)s$. به علاوه،

$$w = P(x^{\frac{1}{2}})(P(x^{\frac{1}{2}})s)^{-\frac{1}{2}}$$

$$[= P(s^{-\frac{1}{2}})(P(s^{\frac{1}{2}})x)^{\frac{1}{2}}],$$

که w نقطه‌ی NT-مقیاسی x و s نامیده می‌شود.

۳- IPM نشدنی با گام NT-کامل

مساله حاصل‌ضرب دکارتی $P_*(\kappa)$- SCHLCP عبارت است از تعیین یک جفت بردار $(x,s) \in \mathsf{J} \times \mathsf{J}$ به طوری که

$$(P) \quad Qx + Rs = q, \ \langle x, s\rangle = 0, \ x, s \in \mathsf{K},$$

که در آن، $\mathsf{J} = \mathsf{J}_1 \times \cdots \times \mathsf{J}_N$ جبر جردن اقلیدسی (فضای ضرب دکارتی) با مخروط متقارن متناظر $\mathsf{K} = \mathsf{K}_1 \times \cdots \times \mathsf{K}_N$ و $Q, R: \mathsf{J} \to \mathsf{J}$ عملگرهای خطی هستند و $q \in \mathsf{J}$. به ازای یک ثابت $\kappa \ge 0$، می‌گوییم (P) خاصیت حاصل‌ضرب دکارتی $P_*(\kappa)$ دارد اگر از $Qx + Rs = 0$ نتیجه شود که به ازای هر $x, s \in \mathsf{J}$،

$$(1+4\kappa) \sum_{j \in I_+} \langle x^{(j)}, s^{(j)} \rangle + \sum_{j \in I_-} \langle x^{(j)}, s^{(j)} \rangle \ge 0,$$

که در آن، $I_+ = \{j : \langle x^{(j)}, s^{(j)} \rangle > 0\}$ و $I_- = \{j : \langle x^{(j)}, s^{(j)} \rangle < 0\}$.

در حالت یک روش نشدنی می‌گوییم یک زوج (x, s) یک ε- جواب مساله (P) است اگر نرم مانده q-Qx-Rs از ε بیشتر نباشد و هم چنین $\langle x, s\rangle \le \varepsilon$. با توجه به نتایج موجود برای IIPMs، فرض می‌کنیم یک جواب بهینه (x^*, s^*) برای مساله (P) وجود دارد. هم چنین، فرض می‌کنیم که الگوریتم با نقطه‌ای مانند $(x^0, s^0) = (\rho_p e, \rho_d e)$ شروع می‌شود که در آن $\rho_p > 0$ و $\rho_d > 0$ چنان هستند که

$$\| x^* \|_\infty = \max_i |\lambda_i(x^*)| \le \rho_p, \quad \| s^* \|_\infty = \max_i |\lambda_i(s^*)| \le \rho_d. \qquad (۱)$$

توجه کنید که به ازای چنین نقطه‌ای، روابط زیر برقرار است:

$$0 \preceq_{\mathsf{K}} x^* - x^0 \preceq_{\mathsf{K}} \rho_p e, \quad 0 \preceq_{\mathsf{K}} s^* - s^0 \preceq_{\mathsf{K}} \rho_d e. \qquad (۲)$$

واضح است که نقطه‌ی شروع برای مساله‌ی (P) نشدنی است. بنابراین، بردار باقی‌مانده‌ی شروع r_q^0 را به صورت

$$r_q^0 := q - Qx^0 - Rs^0 \qquad (۳)$$

تعریف می‌کنیم. به هر حال، می‌توان مسایل پریشیده شده‌ای را تعریف کرد که نقطه‌ی شروع (x^0,s^0) متعلق به مجموعه‌ی شدنی این مسایل باشد. برای این منظور، به ازای هر ν، $0<\nu\le 1$، مساله‌ی پریشیده‌ی (P_ν) را به صورت

$$(P_\nu) \qquad \begin{aligned} & q - Qx - Rs = \nu r_q^0, \\ & x \circ s = 0,\ x, s \in \mathrm{K} \end{aligned}$$

در نظر بگیرید که در آن r_q^0 با (۳) تعریف شده است. به وضوح، به ازای $\nu = 1$، $(x,s)=(x^0,s^0)$ یک جواب شدنی اکید برای مساله (P_ν) است، یعنی مساله پریشیده‌ی (P_ν) در شرط نقطه درونی (IPC) صدق می‌کند. درحالت کلی، لم زیر را داریم که اثبات آن مشابه با اثبات لم ۱،۳ در [۱۷] است.

لم۱،۳. اگر مساله (P) شدنی باشد، آن گاه به ازای هر $0<\nu\le 1$، مساله پریشده‌ی (P_ν) در شرط IPC صدق می‌کند.

فرض کنید که مساله (P) شدنی است و $0<\nu\le 1$. از لم ۱،۳ نتیجه می‌شود که مساله پریشیده‌ی (P_ν) در شرط IPC صدق می‌کند و بنابراین مسیر مرکزی آن وجود دارد. این بدان معنی است که دستگاه غیرخطی

$$\begin{aligned} & q - Qx - Rs = \nu r_q^0,\ x, s \in \mathrm{K} \\ & x \circ s = \mu e, \end{aligned} \qquad (۴)$$

به ازای هر $\mu > 0$، دارای جواب یکتا است که آن را μ-مرکز مساله (P_ν) می‌نامیم. مجموعه‌ی μ-مرکزها مسیر مرکزی نامیده می‌شود. فرض کنید که (x,s) یک جواب شدنی اکید برای مساله پریشیده (P_ν) است. جهت‌های جستجوی Δx و Δs را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که بعد از یک گام NT-کامل، نقطه جدید $(x^+,s^+)=(x+\Delta x, s+\Delta s)$ برای مساله پریشیده (P_{ν^+}) با $\nu^+ := (1-\theta)\nu$، $\theta\in(0,1)$، شدنی اکید باشد، یعنی

$$\begin{aligned} & q - Q(x+\Delta x) - R(s+\Delta s) = \nu^+ r_q^0, \\ & (x+\Delta x)\circ(s+\Delta s) = \mu e. \end{aligned} \qquad (۵)$$

چون (x,s) برای مساله (P_ν) شدنی است، با چشم‌پوشی از جمله‌ی مرتبه دوم $\Delta x \circ \Delta s$، Δx و Δs در

$$\begin{aligned} & Q\Delta x + R\Delta s = \theta\nu r_q^0, \\ & s\circ\Delta x + x\circ\Delta s = \mu e - x\circ s \end{aligned} \qquad (۶)$$

صدق می‌کنند. با توجه به این که x و s لزوماً عملگرهای جابجایی نیستند، دستگاه (۶) همیشه جواب یکتا ندارد. برای جبران این مشکل، معادله دوم در (۴) با $P(u)x\circ P(u^{-1})s = \mu e$ عوض می‌شود که در آن $u\in \mathrm{int}\mathrm{K}$ (لم ۲۸ در [۱۰] را ببینید). در این مقاله، $u = w^{-\frac{1}{2}}$ انتخاب می‌شود که در آن w نقطه مقیاسی داده شده در لم ۱،۲ است. پس از به کار بردن روش نیوتن برای دستگاه جدید، دستگاه جهت‌های جستجو به صورت

$$\begin{aligned} & Q\Delta x + R\Delta s = \theta\nu r_q^0 \\ & P(w)^{-\frac{1}{2}}x\circ P(w)^{\frac{1}{2}}\Delta s + P(w)^{\frac{1}{2}}s\circ P(w)^{-\frac{1}{2}}\Delta x \\ & = \mu e - P(w)^{-\frac{1}{2}}x\circ P(w)^{\frac{1}{2}}s, \end{aligned} \qquad (۷)$$

به دست می‌آید که جهت‌های به دست آمده از حل این دستگاه جهت نسترو-تاد (NT-جهت) نامیده می‌شود. فرض کنید بردار v و جهت‌های جستجوی مقیاس شده d_x و d_s به صورت

$$\begin{aligned} & v := \frac{P(w)^{-\frac{1}{2}}x}{\sqrt{\mu}} \left[= \frac{P(w)^{\frac{1}{2}}s}{\sqrt{\mu}}\right], \\ & d_x := \frac{P(w)^{-\frac{1}{2}}\Delta x}{\sqrt{\mu}},\ d_s := \frac{P(w)^{\frac{1}{2}}\Delta s}{\sqrt{\mu}}, \end{aligned} \qquad (۸)$$

تعریف شوند. با استفاده از (۸)، دستگاه (۷) را می‌توان به صورت

$$QP(w)^{\frac{1}{2}}d_x + RP(w)^{-\frac{1}{2}}d_s = \frac{\theta\nu r_q^0}{\sqrt{\mu}},$$

$$d_x + d_s = v^{-1} - v \qquad (۹)$$

نوشت. یک نتیجه‌ی مهم این است که طرف راست معادله‌ی دوم در (۹) منفی گرادیان تابع مانع لگاریتمی $\Psi(v)$ است، یعنی

$$d_x + d_s = -\nabla\Psi(v), \qquad (۱۰)$$

که در آن،

$$\Psi(v) = \sum_{i=1}^{r} \psi(\lambda_i(v)),$$
$$\psi(t) := \frac{t^2-1}{2} - \log t, \quad t > 0.$$

به علاوه، از اندازه‌ی نزدیکی

$$\delta(v) := \| \nabla\Psi(v) \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} (\psi'(\lambda_i(v)))^2} \qquad (۱۱)$$

برای نشان دادن نزدیکی نقاط به مسیر مرکزی استفاده می‌کنیم.

۱،۳. یک تکرار از الگوریتم

اندازه نزدیکی به μ - مرکز مساله پریشیده‌ی (P_v) را با کمیت $\delta(v)$ می‌سنجیم که در (۱۱) تعریف شده است. فرض کنید که به ازای $\mu \in (0, \mu^0]$ نقاط $x \in K$ و $s \in K$ را داریم که به ازای $v = \frac{\mu}{\mu^0}$ در شرط شدنی بودن $q - Qx - Rs = vr_q^0$ صدق می‌کنند و رابطه $\delta(v) \le \tau$ برقرار است. μ را به $\mu^+ = (1-\theta)\mu$، $\theta \in (0,1)$، کاهش می‌دهیم و نقاط تکرار جدید x^+ و s^+ را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که با μ^+ جای گذاری شده به جای μ و $v^+ = \frac{\mu^+}{\mu^0}$ جای گذاری شده به جای v در معادله اول (۴) صدق کنند و نیز $\delta(v_{++}) \le \tau$. این روند تا یافتن یک ε - جواب بهینه برای مساله (P) ادامه می‌یابد.

همان طور که در بخش ۳ گفتیم، نقاط جدید (x^+, s^+) به ازای $v = v^+$، در معادله آفینی در (۴) صدق می‌کنند. بخش اصلی تجزیه و تحلیل تضمین $x^+ \in \mathrm{int}K$ و $s^+ \in \mathrm{int}K$ است و این که این نقاط در شرط $\delta(v_{++}) \le \tau$ صدق می‌کنند. اکنون قدم‌های اساسی از الگوریتم را ارایه می‌دهیم.

الگوریتم ۱.

ورودی‌ها:

پارامتر دقت $\varepsilon > 0$،

پارامتر به هنگام‌سازی مانع $0 < \theta < 1$،

شروع

قرارده

$$x := \rho_p e,\ s := \rho_d e,\ \mu := v\rho_p\rho_d,\ v = 1$$

مادام که $\max(\langle x, s\rangle, \| r_q \|_F) > \varepsilon$ انجام ده

شروع

قرارده $(x,s) := (x,s) + (\Delta x, \Delta s)$

به هنگام‌سازی μ و v

قرارده $\mu := (1-\theta)\mu$ و $v := (1-\theta)v$

پایان حلقه

پایان.

هدف اصلی این مقاله، استفاده از یک تابع هسته است که در مرز ناحیه شدنی مقدار متناهی دارد. یعنی

$$\psi(t) = \frac{(t-1)^2}{2},\ t > 0. \qquad (۱۲)$$

چون $\psi'(t) = t - 1$، معادله مقیاس شده‌ی (۱۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$d_x + d_s = e - v := p_v \qquad (۱۳)$$

در این صورت، داریم:

$$\delta(v) = \| e - v \|_F. \qquad (۱۴)$$

اکنون لم زیر را داریم.

لم۲،۳. (لم ۹ در [۲۴]) داریم:

$$1-\delta(v) \le \lambda_i(v) \le 1+\delta(v),$$
$$i=1,\ldots,r.$$

تحلیل پیچیدگی روش نقطه درونی با گام NT – کامل بر اساس اندازه‌ی نزدیکی داده شده در معادله (۱۴)، برای SCLCP در [۲۵] و برای بهینه‌سازی متقارن (SO) در [۲۶] ارایه شده است. اینجا، از خاصیت تحدب نمایی تابع هسته برای تحلیل الگوریتم استفاده می‌شود. بنابراین، تجزیه و تحلیل الگوریتم متفاوت از تحلیل‌های موجود در [۲۵] و [۲۶] است.

۴- تحلیل الگوریتم

۱،۴. کران بالا برای $\delta(v_{++})$

در این بخش، ابتدا برخی لم‌ها وقضیه‌های مورد نیاز برای تجزیه و تحلیل الگوریتم را ارایه کرده و سپس یک کران بالا برای $\delta(v_{++})$ به دست می‌آوریم.

لم۱،۴. (لم ۲،۱،۲ در [۲۷]) فرض کنید $\psi(t)$ یک تابع دوبار مشتق‌پذیر نسبت به $t>0$ باشد. گزاره‌های زیر معادلند:

(i) به ازای هر $t_1,t_2>0$،

$$\psi(\sqrt{t_1t_2}) \le \frac{1}{2}(\psi(t_1)+\psi(t_2))$$

(ii) به ازای هر $t>0$، $t\psi''(t)+\psi'(t)\ge 0$.

(iii) $\psi(\exp(\xi))$ محدب است.

واضح است که برای تابع هسته $\psi(t)$ تعریف شده در (۱۲)، به ازای $t \ge \frac{1}{2}$، داریم:

$$t\psi''(t)+\psi'(t)=t+t-1$$
$$=2t-1\ge 0.$$

با توجه به لم ۱،۴ (مشابه بیان شده در [۲۸])، به ازای $t \ge \frac{1}{2}$، $\psi(t)$ را محدب نمایی یا به اختصار e–محدب می‌نامیم.

قضیه۲،۴. (قضیه‌ی ۲،۳،۴ در [۲۹]) فرض کنید که $x,s\in \mathrm{int}\mathcal{K}$ است و $\Psi(v)$ تابع تعریف شده در (۱۰) در این صورت

$$\Psi((P(x)^{\frac{1}{2}}s)^{\frac{1}{2}}) \le \frac{1}{2}(\Psi(x)+\Psi(s)).$$

فرض کنید که

$$q_v := d_x - d_s.$$

در این صورت، داریم:

$$d_x \circ d_s = \frac{1}{4}(p_v\circ p_v - q_v\circ q_v). \qquad (۱۵)$$

از این رو

$$\| q_v \|_F^2 = \| p_v \|_F^2 - 4\langle d_x, d_s\rangle. \qquad (۱۶)$$

در ادامه، از نماد $\omega := \frac{1}{2}(\| d_x \|_F^2 + \| d_s \|_F^2)$ استفاده می‌کنیم. با استفاده از (۸)، خواهیم داشت:

$$x^+ = x+\Delta x = \sqrt{\mu}P(w)^{\frac{1}{2}}(v+d_x),$$
$$s^+ = s+\Delta s = \sqrt{\mu}P(w)^{-\frac{1}{2}}(v+d_s). \qquad (۱۷)$$

چون $P(w)^{\frac{1}{2}}$ و معکوس آن $P(w)^{-\frac{1}{2}}$ خود ریختی‌هایی از $\mathrm{int}\mathcal{K}$ هستند، پس x^+ و s^+ به $\mathrm{int}\mathcal{K}$ تعلق دارند اگر و تنها اگر $v+d_x$ و $v+d_s$ به $\mathrm{int}\mathcal{K}$ تعلق داشته باشند.

لم۳،۴. (لم ۱،۴ در[۳۰]) فرض کنید به ازای $0\le\alpha\le 1$،

$$x(\alpha) := x+\alpha\Delta x, s(\alpha) := s+\alpha\Delta s.$$

به علاوه، فرض کنید که به ازای $0\le\alpha\le\overline{\alpha}$، $x,s\in \mathrm{int}\mathcal{K}$ و $x(\alpha)\circ s(\alpha)\in \mathrm{int}\mathcal{K}$ در این صورت، $x(\overline{\alpha})\in \mathrm{int}\mathcal{K}$ و $s(\overline{\alpha})\in \mathrm{int}\mathcal{K}$.

لم بعدی تضمین می‌کند که نقطه جدید پس از گام NT – کامل شدنی اکید است.

لم۴،۴. اگر $\delta(v)^2+2\omega<1$ آن گاه (x^+,s^+) شدنی اکید است.

برهان. فرض کنید α، $0\le\alpha\le 1$. تعریف می‌کنیم $v_x(\alpha):=v+\alpha d_x$ و $v_s(\alpha):=v+\alpha d_s$. در نتیجه، داریم:

$$\begin{aligned}
v_x(\alpha)\circ v_s(\alpha) &= (v+\alpha d_x)\circ(v+\alpha d_s)\\
&= v\circ v+\alpha v\circ(d_x+d_s)+\alpha^2 d_x\circ d_s\\
&= (1-\frac{\alpha}{2})v\circ v+\frac{\alpha}{2}(v\circ v+2v\circ p_v)\\
&\quad +\alpha^2(\frac{p_v\circ p_v-q_v\circ q_v}{4})\\
&= (1-\frac{\alpha}{2})v\circ v+\frac{\alpha}{2}(e-(1-\frac{\alpha}{2})p_v\circ p_v\\
&\quad -\frac{\alpha}{2}q_v\circ q_v),
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

که در آن تساوی آخر با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
e &= e\circ e=(v+p_v)\circ(v+p_v)\\
&= v^2+2v\circ p_v+p_v\circ p_v.
\end{aligned}$$

بنابراین $v_x(\alpha)\circ v_s(\alpha)\in \operatorname{int}\mathcal{K}$ هرگاه داشته باشیم:

$$\|(1-\frac{\alpha}{2})p_v\circ p_v+\frac{\alpha}{2}q_v\circ q_v\|_F<1.$$

حال با استفاده از نامساوی مثلثی و (۱۶)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\|(1-\frac{\alpha}{2})p_v\circ p_v+\frac{\alpha}{2}q_v\circ q_v\|_F\\
&\le (1-\frac{\alpha}{2})\|p_v\circ p_v\|_F+\frac{\alpha}{2}\|q_v\circ q_v\|_F\\
&\le (1-\frac{\alpha}{2})\|p_v\|_F^2+\frac{\alpha}{2}\|q_v\|_F^2\\
&= \delta(v)^2-2\alpha\langle d_x,d_s\rangle\\
&\le \delta(v)^2+2\omega<1.
\end{aligned}$$

از این رو، لم ۳،۴ ایجاب می‌کند که $v_x(1)=v+d_x\in\operatorname{int}\mathcal{K}$ و $v_s(1)=v+d_s\in\operatorname{int}\mathcal{K}$ و برهان تمام است.

پس از به هنگام‌سازی μ، بردار جدید v به صورت

$$v^+=\frac{P(w^+)^{-\frac{1}{2}}x^+}{\sqrt{\mu}}[=\frac{P(w^+)^{-\frac{1}{2}}s^+}{\sqrt{\mu}}]$$

تعریف می‌شود که در این صورت با استفاده از (۱۷) می‌توان آن را به صورت معادل

$$\begin{aligned}
v^+ &= P(w^+)^{-\frac{1}{2}}P(w)^{\frac{1}{2}}(v+d_x)\\
&= P(w^+)^{\frac{1}{2}}P(w)^{-\frac{1}{2}}(v+d_s)
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

نوشت که در آن،

$$\begin{aligned}
w^+ &= P(x^{+\frac{1}{2}})(P(x^{+\frac{1}{2}})s^+)^{-\frac{1}{2}}\\
&[= P(s^{+-\frac{1}{2}})(P(s^{+\frac{1}{2}})x^+)^{\frac{1}{2}}].
\end{aligned}$$

بااستفاده از گزاره‌ی ۵،۹،۳ در [۲۹]، داریم:

$$v^+\approx(P(v+d_x)^{\frac{1}{2}}(v+d_s))^{\frac{1}{2}},$$

و بنابراین،

$$\Psi(v^+)=\Psi((P(v+d_x)^{\frac{1}{2}}(v+d_s))^{\frac{1}{2}}). \tag{۲۰}$$

به علاوه، با استفاده از (۱۹) و (۱۸)، به ازای $\alpha=1$، خواهیم داشت:

$$(v^+)^2=\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}(e-\frac{1}{2}p_v\circ p_v-\frac{1}{2}q_v\circ q_v). \tag{۲۱}$$

در بقیه این بخش، یک کران بالا برای $\Psi(v^+)$ با استفاده از خاصیت تحدب نمایی به دست می‌آوریم. برای این منظور، فرض می‌کنیم به ازای $i=1,\dots,r$،

$$\begin{aligned}
\lambda_i(v+d_x)&\ge\lambda_{\min}(v)-\|d_x\|_F\ge\frac{1}{2},\\
\lambda_i(v+d_s)&\ge\lambda_{\min}(v)-\|d_s\|_F\ge\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

حال با استفاده از لم ۲،۳ و رابطه $2\omega = \| d_x \|_F^2 + \| d_s \|_F^2$ ، نامساوی‌های (۲۲) برقرار هستند هرگاه داشته باشیم:

$$\delta(v) + 2\omega \le \frac{1}{2}.$$

لم۵،۴. $\Psi(v^+) \le \frac{\omega}{2}$.

برهان. با استفاده از (۲۰) و قضیه‌ی ۲،۴، داریم:

$$\Psi(v^+) = \Psi((P(v+d_x)^{\frac{1}{2}}(v+d_s))^{\frac{1}{2}})$$
$$\le \frac{1}{2}(\Psi(v+d_x) + \Psi(v+d_s))$$
$$= \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{r}\psi(\lambda_i(v+d_x)) + \sum_{i=1}^{r}\psi(\lambda_i(v+d_s))]$$
$$= \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{2}(\lambda_i(v+d_x)-1)^2$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{2}(\lambda_i(v+d_s)-1)^2]$$
$$= \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{2}(\lambda_i(v+d_x-e))^2$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{2}(\lambda_i(v+d_s-e))^2]$$
$$= \frac{1}{4}[\| v-e+d_x \|_F^2 + \| v-e+d_s \|_F^2]$$
$$= \frac{1}{4}[2\| v-e \|_F^2 + (\| d_x \|_F^2 + \| d_s \|_F^2)$$
$$+2\langle v-e, d_x+d_s \rangle]$$
$$= \frac{1}{4}[2\delta(v)^2 + 2\omega$$
$$+2\langle \nabla\Psi(v), -\nabla\Psi(v) \rangle]$$
$$= \frac{1}{4}[2\delta(v)^2 + 2\omega - 2\| \nabla\Psi(v) \|_F^2]$$
$$= \frac{\omega}{2},$$

که اثبات را کامل می‌کند.

لم۶،۴. برای $\psi(t)$ تعریف شده در (۱۲) و $\beta > 1$، داریم:

$$\psi(\beta t) = \beta\psi(t) + \frac{\beta(\beta-1)}{2}(t^2 - \frac{1}{\beta}).$$

برهان. با استفاده از تعریف $\psi(t)$ در (۱۲)، داریم:

$$\psi(\beta t) = \frac{1}{2}(\beta t-1)^2 = \frac{1}{2}(\beta^2 t^2 - 2\beta t + 1)$$
$$= \frac{1}{2}(\beta(t-1)^2 + \beta(\beta-1)t^2 + 1 - \beta)$$
$$= \beta\psi(t) + \frac{\beta(\beta-1)}{2}(t^2 - \frac{1}{\beta}),$$

و برهان تمام است.

لم۷،۴. فرض کنید $0 < \theta < 1$. در این صورت،

$$\Psi(\frac{v}{\sqrt{1-\theta}}) = \frac{\Psi(v)}{\sqrt{1-\theta}}$$
$$+\frac{1-\sqrt{1-\theta}}{2(1-\theta)}(\| v \|_F^2 - r\sqrt{1-\theta}).$$

برهان. با استفاده از تعریف $\Psi(t)$ و لم ۶،۴ با قرار دادن $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$، داریم:

$$\Psi(\frac{v}{\sqrt{1-\theta}}) = \sum_{i=1}^{r}\psi(\frac{\lambda_i(v)}{\sqrt{1-\theta}})$$
$$= \sum_{i=1}^{r}[\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\psi(\lambda_i(v))$$
$$+\frac{1-\sqrt{1-\theta}}{2(1-\theta)}(\lambda_i(v)^2 - \sqrt{1-\theta})]$$
$$= \frac{\Psi(v)}{\sqrt{1-\theta}} + \frac{1-\sqrt{1-\theta}}{2(1-\theta)}(\| v \|_F^2 - r\sqrt{1-\theta}).$$

بنابر این برهان تمام است.

لم۸،۴. داریم:

$$\| v^+ \|_F^2 \le r + \sqrt{r}\delta(v) + \omega.$$

برهان. از روابط (۲۱) و (۱۶) آن نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\|v^+\|_F^2 &= tr(\|v^+\|_F^2 = tr((v^+)^2)\\
&= \frac{1}{2}tr(v^2) + \frac{1}{2}tr(e)\\
&-\frac{1}{4}tr(p_v \circ p_v) - \frac{1}{4}tr(q_v \circ q_v)\\
&= \frac{1}{2}\|v\|_F^2 + \frac{r}{2} - \frac{1}{4}\|p_v\|_F^2 - \frac{1}{4}\|q_v\|_F^2\\
&\le \frac{1}{2}\|v\|_F^2 + \frac{r}{2} - \frac{1}{4}\|p_v\|_F^2\\
&-\frac{1}{4}\|p_v\|_F^2 + \omega\\
&\le \frac{1}{2}(\sqrt{r} + \delta(v))^2 + \frac{r}{2}\\
&-\frac{1}{2}\delta(v)^2 + \omega\\
&= r + \sqrt{r}\delta(v) + \omega,
\end{aligned}$$

و برهان تمام است.

لم۹،۴. فرض کنید $\mu_+ = (1-\theta)\mu$، $0 < \theta < 1$ و $v_{++} = \frac{v^+}{\sqrt{1-\theta}}$. اگر $\delta(v)^2 + 2\omega < 1$، آن‌گاه

$$\delta(v_{++}) \le [\frac{\omega}{1-\theta} + \frac{1-\sqrt{1-\theta}}{1-\theta}(r + \sqrt{r}\delta(v))$$
$$+r(1-\frac{1}{\sqrt{1-\theta}})]^{\frac{1}{2}}.$$

برهان. با استفاده از لم‌های ۷،۴، ۵،۴ و ۸،۴، داریم:

$$\begin{aligned}
\delta(v_{++}) &= \sqrt{2\Psi(v_{++})}\\
&= [\frac{2\Psi(v^+)}{\sqrt{1-\theta}} + \frac{1-\sqrt{1-\theta}}{1-\theta}(\|v^+\|_F^2 - r\sqrt{1-\theta})]^{\frac{1}{2}}\\
&\le [\frac{\omega}{\sqrt{1-\theta}} + \frac{1-\sqrt{1-\theta}}{1-\theta}(r + \sqrt{r}\delta(v)\\
&+\omega - r\sqrt{1-\theta})]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= [\frac{\omega}{1-\theta} + \frac{1-\sqrt{1-\theta}}{1-\theta}(r + \sqrt{r}\delta(v))$$
$$+r(1-\frac{1}{\sqrt{1-\theta}})]^{\frac{1}{2}}$$

این لم را ثابت می‌کند.

۲،۴. کران بالا برای $\omega(v)$

در این بخش، یک کران بالا برای $\omega(v)$ به دست می‌آوریم که برای پیدا کردن یک مقدار پیش‌فرض برای θ لازم است.

لم۱۰،۴. اگر SCHLCP در خاصیت حاصل‌ضرب دکارتی $P_*(\kappa)$ صدق کند، آن گاه برای هر $w \in int\mathcal{K}$، جواب (d_x, d_s) برای دستگاه خطی

$$QP(w)^{\frac{1}{2}}d_x + RP(w)^{-\frac{1}{2}}d_s = 0,$$
$$P(w)^{-\frac{1}{2}}P(w)^{\frac{1}{2}}d_x + P(w)^{\frac{1}{2}}P(w)^{-\frac{1}{2}}d_s \quad (۲۳)$$
$$= e - v,$$

در نامساوی $\| d_x \|_F^2 + \| d_s \|_F^2 \le (1+2\kappa)\delta(v)^2$ صدق می‌کند.

برهان. با استفاده از معادله دوم در (۲۳)، خواهیم داشت:

$$\| d_x \|_F^2 + \| d_s \|_F^2 = \| e - v \|_F^2 - 2\langle d_x, d_s \rangle$$
$$= \delta(v)^2 - 2\langle P(w)^{\frac{1}{2}}d_x, P(w)^{-\frac{1}{2}}d_s \rangle. \quad (۲۴)$$

چون مساله SCHLCP در خاصیت حاصل‌ضرب دکارتی $P_*(\kappa)$ صدق می‌کند، از معادله اول در (۲۳) نتیجه می‌شود:

$$\langle P(w)^{\frac{1}{2}}d_x, P(w)^{-\frac{1}{2}}d_s \rangle$$
$$\ge -4\kappa \sum_{i \in I_+} \langle P(w^{(i)})^{\frac{1}{2}}d_x^{(i)}, P(w^{(i)})^{-\frac{1}{2}}d_s^{(i)} \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= -4\kappa \sum_{i\in I_+} \langle d_x^{(i)}, d_s^{(i)} \rangle \\
&\geq -\kappa \sum_{i\in I_+} \| d_x^{(i)} + d_s^{(i)} \|_F^2 \\
&\geq -\kappa \sum_{i=1}^{N} \| d_x^{(i)} + d_s^{(i)} \|_F^2 \\
&= -\kappa \| d_x + d_s \|_F^2 \\
&= -\kappa \| e - v \|_F^2 = -\kappa \delta(v)^2,
\end{aligned}
$$

که در آن، $I_+ = \{i : \langle (d_x)_i, (d_s)_i \rangle > 0\}$. با جای گذاری کران رابطه‌ی بالا در (۲۴)، نامساوی مطلوب حاصل می‌شود.

پوترا و استوئر در سال ۲۰۰۹ [۳۱] نتیجه زیر را ثابت کرده‌اند.

لم A. اگر مساله HLCP در خاصیت حاصل ضرب دکارتی $P_*(\kappa)$ صدق کند، آن گاه به ازای هر $(x,s) \in R^{2n}$ و هر $a,b \in R^n$ جواب (u, v) دستگاه خطی

$$
\begin{aligned}
su + xv &= a \\
Qu + Rv &= \hat{b}
\end{aligned}
$$

در نامساوی

$$
\begin{aligned}
&\| Du \|_2^2 + \| D^{-1} v \|_2^2 \leq \\
&[\sqrt{1+2\kappa}\, \| (xs)^{-1/2} a \|_2^2 \\
&+ (1+\sqrt{2+4\kappa})\, \xi(z, \hat{b})]^2
\end{aligned}
$$

صدق می‌کند که در آن $D = diag(x^{-1/2} s^{1/2})$ و

$$
\begin{aligned}
&\xi(z, \hat{b})^2 = \min\{\| D\hat{u} \|_F^2 + \\
&\| D^{-1}\hat{v} \|_F^2 : Q\hat{u} + R\hat{v} = \hat{b}\}.
\end{aligned}
$$

با استفاده از لم ۱۰،۴، لم زیر که توسیعی از لم A به زمینه‌ی جبر جردن اقلیدسی است را اثبات می‌کنیم.

لم۱۱،۴. اگر مساله SCHLCP در خاصیت حاصل‌ضرب دکارتی $P_*(\kappa)$ صدق کند، آن گاه به ازای هر $w \in \mathrm{int}\mathcal{K}$ جواب (d_x, d_s) برای دستگاه (۹) در نامساوی

$$
\begin{aligned}
&\| d_x \|_F^2 + \| d_s \|_F^2 \leq [\sqrt{1+2\kappa}\,\delta(v) \\
&+ (1+\sqrt{2+4\kappa})\, \xi(w, \frac{\theta v r_q^0}{\sqrt{\mu}})]^2
\end{aligned}
$$

صدق می‌کند که در آن،

$$
\begin{aligned}
&\xi(w, \frac{\theta v r_q^0}{\sqrt{\mu}})^2 = \min\{\| \tilde{d}_x \|_F^2 + \| \tilde{d}_s \|_F^2 : \\
&QP(w^{\frac{1}{2}})\tilde{d}_x + RP(w^{-\frac{1}{2}})\tilde{d}_s = \frac{\theta v r_q^0}{\sqrt{\mu}}\}.
\end{aligned}
$$

برهان. فرض کنید (d_x, d_s) یک جواب (۹) است. در این صورت، $(\bar{d}_x, \bar{d}_s) = (d_x, d_s) - (\tilde{d}_x, \tilde{d}_s)$ در دستگاه

$$
\begin{aligned}
&QP(w^{\frac{1}{2}})\bar{d}_x + RP(w^{-\frac{1}{2}})\bar{d}_s = 0, \\
&P(w^{-\frac{1}{2}})P(w^{\frac{1}{2}})\bar{d}_x + P(w^{\frac{1}{2}})P(w^{-\frac{1}{2}})\bar{d}_s \\
&= e - v - [P(w^{-\frac{1}{2}})P(w^{\frac{1}{2}})\tilde{d}_x \\
&+ P(w^{\frac{1}{2}})P(w^{-\frac{1}{2}})\tilde{d}_s]
\end{aligned}
$$

صدق می‌کند. قرار دهید:

$$
\| (d_x, d_s) \|_w^2 = \| d_x \|_F^2 + \| d_s \|_F^2 \ .
$$

با استفاده از لم ۱۰،۴، خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\| (d_x, d_s) \|_w \leq \| (\bar{d}_x, \bar{d}_s) \|_w + \| (\tilde{d}_x, \tilde{d}_s) \|_w \\
&\leq \sqrt{1+2\kappa}\, \| e - v - [P(w^{-\frac{1}{2}})P(w^{\frac{1}{2}})\tilde{d}_x \\
&+ P(w^{\frac{1}{2}})P(w^{-\frac{1}{2}})\tilde{d}_s] \|_F + \| (\tilde{d}_x, \tilde{d}_s) \|_w \\
&\leq \sqrt{1+2\kappa}(\| e - v \|_F + \| \tilde{d}_x + \tilde{d}_s \|_F) \\
&+ \| (\tilde{d}_x, \tilde{d}_s) \|_w
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{1+2\kappa}\,(\delta(v) + \\
&\sqrt{\|(\tilde{d}_x,\tilde{d}_s)\|_w^2 + 2\langle \tilde{d}_x,\tilde{d}_s\rangle}\,) + \|(\tilde{d}_x,\tilde{d}_s)\|_w \\
&\le \sqrt{1+2\kappa}\,(\delta(v) + \sqrt{2}\,\|(\tilde{d}_x,\tilde{d}_s)\|_w\,) \\
&+ \|(\tilde{d}_x,\tilde{d}_s)\|_w \\
&= \sqrt{1+2\kappa}\,\delta(v) + (1+\sqrt{2+4\kappa})\,\|(\tilde{d}_x,\tilde{d}_s)\|_w \\
&\le \sqrt{1+2\kappa}\,\delta(v) + (1+\sqrt{2+4\kappa})\,\xi(w,\frac{\theta v r_q^0}{\sqrt{\mu}}),
\end{aligned}
$$

و برهان تمام است.

حال، یک کران بالا برای $\xi(w,\frac{\theta v r_q^0}{\sqrt{\mu}})$ به دست می‌آوریم. با استفاده از تعریف r_q^0 داریم:

$$
\begin{aligned}
r_q^0 &= q - Qx^0 - Rs^0 \\
&= Qx^* + Rs^* - Qx^0 - Rs^0 \\
&= Q(x^* - x^0) + R(s^* - s^0).
\end{aligned}
$$

با ضرب کردن هر دو طرف این معادله در $\frac{\theta v}{\sqrt{\mu}}$ به دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
\frac{\theta v r_q^0}{\sqrt{\mu}} &= QP(w)^{\frac{1}{2}}(\frac{\theta v}{\sqrt{\mu}}P(w)^{-\frac{1}{2}}(x^* - x^0)) \\
&+ RP(w)^{-\frac{1}{2}}(\frac{\theta v}{\sqrt{\mu}}P(w)^{\frac{1}{2}}(s^* - s^0))
\end{aligned} \tag{۲۵}
$$

با مقایسه معادله (۲۵) و تعریف $\xi(w,\frac{\theta v r_q^0}{\sqrt{\mu}})$، نتیجه می‌شود

$$
\begin{aligned}
\xi(w,\frac{\theta v r_q^0}{\sqrt{\mu}})^2 &\le \|\frac{\theta v}{\sqrt{\mu}}P(w)^{-\frac{1}{2}}(x^* - x^0)\|_F^2 \\
&+ \|\frac{\theta v}{\sqrt{\mu}}P(w)^{\frac{1}{2}}(s^* - s^0)\|_F^2 \\
&\le \frac{\theta^2 v^2}{\mu}(\rho_p^2 tr(w^{-2}) + \rho_d^2 tr(w^2)) \qquad (۲۶) \\
&\le \frac{\theta^2 v^2}{\mu}(\rho_p^2 \frac{\mathrm{tr}(s^2)}{\mu\lambda_{\min}(v)^2} + \rho_d^2 \frac{\mathrm{tr}(x^2)}{\mu\lambda_{\min}(v)^2}) \\
&\le \frac{\theta^2}{(1-\delta(v))^2}(\frac{tr(s)^2}{\rho_d^2} + \frac{tr(x)^2}{\rho_p^2}),
\end{aligned}
$$

که در آن، نامساوی سوم از اثبات لم ۵٫۶ در [۳۲] و نامساوی آخر با استفاده از لم ۲٫۳ و $\mu = \rho_p\rho_d v$ به دست می‌آید.

لم۱۲٫۴. (لم ۷ در[۲۰]) فرض کنید که (x,s) یک جواب شدنی برای مساله پریشیده (P_v) است و $(x^0,s^0) = (\rho_p e, \rho_d e)$ و (x^*,s^*) با (۱) تعریف شده است. در این صورت، داریم:

$$
\begin{aligned}
tr(x) &\le (1+4\kappa) r\rho_p (2 + (1+\delta(v))^2), \\
tr(s) &\le (1+4\kappa) r\rho_d (2 + (1+\delta(v))^2).
\end{aligned}
$$

با جای گذاری کران های به دست آمده در لم ۱۲٫۴ در رابطه (۲۶)، یک کران بالا برای $\xi(w,\frac{\theta v r_q^0}{\sqrt{\mu}})$ به صورت:

$$
\xi(w,\frac{\theta v r_q^0}{\sqrt{\mu}}) \le \frac{\sqrt{2}(1+4\kappa) r\theta(2+(1+\delta(v))^2)}{1-\delta(v)} \tag{۲۷}
$$

به دست می‌آید. با جای گذاری این کران در لم ۱۱٫۴ و استفاده از تعریف ω، خواهیم داشت:

$$
\omega \le \frac{1}{2}[\sqrt{1+2\kappa}\,\delta(v) + \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2+4\kappa})(1+4\kappa) r\theta(2+(1+\delta(v))^2)}{1-\delta(v)}]^2. \tag{۲۸}
$$

۳٫۴. پیشنهادهایی برای مقدارهای θ و τ

می‌خواهیم مقدار τ را به گونه‌ای تعیین کنیم که اگر نامساوی $\delta(v) \le \tau$ برقرار باشد، آن گاه $\delta(v_{++}) \le \tau$. با استفاده از لم ۹٫۴، کافیست τ را

چنان تضمین کنیم که از $\delta(v) \le \tau$ و نامساوی (۲۸)، نامساوی‌های $\delta(v)^2 + 2\omega < 1$ و

$$\left[\frac{\omega}{1-\theta} + \frac{1-\sqrt{1-\theta}}{1-\theta}(r + \sqrt{r}\delta(v)) + r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \le \tau \quad (۲۹)$$

نتیجه شوند. با استفاده از $\delta(v) \le \tau$، از (۲۸) نتیجه می‌شود که $f(\tau)$ تعریف شده با

$$f(\tau) := \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+2\kappa}\,\tau + \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2+4\kappa})(1+4\kappa)r\theta(2+(1+\tau)^2)}{1-\tau}\right]^2$$

یک کران بالا برای ω است. بنابراین، $\delta(v)^2 + 2\omega < 1$ و نامساوی (۲۹) برقرار هستند هرگاه

$$\tau^2 + 2f(\tau) < 1 \quad (i)$$

$$\frac{f(\tau)}{1-\theta} + \frac{1-\sqrt{1-\theta}}{1-\theta}(r + \sqrt{r}\tau) + r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\right) \le \tau^2 \quad (ii)$$

فرض کنید $\tau = \frac{1}{40(1+4\kappa)^3}$. در این صورت گزاره‌های (i) و (ii) برقرارهستند هرگاه

$$\theta = \frac{1}{1000(1+4\kappa)^4(1+\sqrt{2+4\kappa})^2 r}. \quad (۳۰)$$

بنا به لم ۴،۴، گزاره (i) به این معنی است که نقطه (x^+, s^+) شدنی اکید است، در حالی که گزاره (ii) نتیجه می‌دهد که $\delta(v_{++}) \le \tau$. بدین ترتیب، خاصیت $\delta(v) \le \tau$ در همه تکرارها حفظ می‌شود و الگوریتم خوش تعریف است.

۴.۴. کران تکرارها

همانطور که در بخش‌های پیشین دیدیم، اگر در شروع یک تکرار، با $\tau = \frac{1}{40(1+4\kappa)^3}$ و θ تعریف شده در (۳۰)، داشته باشیم $\delta(v) \le \tau$، پس از گام NT – کامل نقطه تکرار جدید شدنی اکید است و در رابطه $\delta(v_{++}) \le \tau$ صدق می‌کند. این بدان معنی است که الگوریتم همگرا است. حال، نتیجه اصلی را در قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه۱۳،۴. فرض کنید (P) شدنی است و ثابت‌های $\rho_p, \rho_d > 0$ چنان هستند که به ازای جواب بهینه‌ای مانند (x^*, s^*) از (P)، داریم $\|x^*\|_\infty \le \rho_p$ و $\|s^*\|_\infty \le \rho_d$. در این صورت، پس از حداکثر

$$1000(1+4\kappa)^4(1+\sqrt{2+4\kappa})^2 r \times \log\frac{\max\{\langle x^0, s^0\rangle, \|r_q^0\|_F\}}{\varepsilon}$$

تکرار، الگوریتم یک ε - جواب برای (P) به دست می‌آورد.

برهان. فرض کنید

$$(x^k, s^k) = (x^+, s^+)$$

در این صورت از به هنگام سازی $\mu^+ = (1-\theta)\mu$ و $\langle x^k, s^k\rangle = n\mu_k$ داریم:

$$\langle x^k, s^k\rangle = n\mu_k = (1-\theta)n\mu_{k-1} = (1-\theta)^k n\mu^0 = (1-\theta)^k\langle x^0, s^0\rangle$$

بعلاوه فرض کنید $r_q^k = r_q(x^k, s^k)$ مانده در (x^k, s^k) را نشان دهد. با استفاده از معادلات (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$r_q^k = (1-\theta)r_q^{k-1} = (1-\theta)^k r_q^0.$$

بنابر این، $\langle x^k, s^k\rangle \le \varepsilon$ و $\|r_q^k\|_F \le \varepsilon$. اگر داشته باشیم:

$$(1-\theta)^k\langle \mathrm{x}^0, \mathrm{s}^0\rangle \le \varepsilon$$

و

$$(1-\theta)^k\left\|\mathrm{r}_\mathrm{q}^\mathrm{k}\right\|_F \le \varepsilon \qquad (۳۱)$$

اگر نامساوی زیر بر قرار باشد

$$(1-\theta)^k max\left\{\langle \mathrm{x}^0, \mathrm{s}^0\rangle, \left\|\mathrm{r}_\mathrm{q}^\mathrm{k}\right\|_F\right\} \le \varepsilon,$$

آن گاه نامساوی (۳۱) صادق است. با لگاریتم گرفتن از طرفین نامساوی بالا خواهیم داشت:

$$k\log(1-\theta) + \log max\left\{\langle \mathrm{x}^0, \mathrm{s}^0\rangle, \left\|\mathrm{r}_\mathrm{q}^\mathrm{k}\right\|_F\right\} \le \log\varepsilon. \qquad (۳۲)$$

حال با توجه به نامساوی $\log(1+\gamma) \le \gamma,\ \gamma > -1$، نامساوی (۳۲) صادق است اگر داشته باشیم:

$$-k\theta \le \log\varepsilon - \log max\left\{\langle \mathrm{x}^0, \mathrm{s}^0\rangle, \left\|r_q^0\right\|_\mathrm{F}\right\},$$

و این نتیجه می‌دهد که

$$k \ge \frac{1}{\theta}\log\frac{\max\{\langle x^0, s^0\rangle, \| r_q^0 \|_F\}}{\varepsilon}$$

با جایگزینی θ تعریف شده در (۳۰) در رابطه بالا نتیجه حاصل می‌شود.

تبصره ۱: در هر تکرار الگوریتم یک دستگاه معادلات خطی m+n معادله با m+n مجهول حل می‌شود و بعلاوه m<n. پس هر تکرار $O(n^3)$ عملیات حسابی نیاز دارد. تمام الگوریتم‌های نقطه درونی یک چنین دستگاه را حل می‌کنند و بنابر این تعداد عملیات حسابی در این الگوریتم‌ها ثابت $(O(n^3))$ می‌ماند. بعلاوه در هر تکرار شکاف دوگانی $\varepsilon_0 = \langle x^0, s^0\rangle$ را به دقت مورد نظر ε کاهش می‌دهند. چون این کاهش وابسته به پارامتر مانع θ است، پس در هر الگوریتم می‌تواند متفاوت باشد. کران تعداد تکرارهای لازم برای این کاهش را کران تکرارها می‌نامند. بنابراین الگوریتم‌های نقطه درونی فقط نیاز به محاسبه کران تکرارها را دارند.

قضیه ۱۳،۴ یک کران تکرار را برای الگوریتم ۱ بدست می‌دهد.

۵. نتیجه‌گیری

یک IIPM با گام NT- کامل برای مسایل حاصل ضرب دکارتی $P_*(\kappa)$-SCHLCP براساس خاصیت تحدب نمایی ارایه دادیم و نتایج پیچیدگی مربوط را به دست آوردیم. الگوریتم منظور شده تنها از یک گام کامل شدنی استفاده کرده و به ازای مقادیر انتخاب شده برای τ و θ خوش تعریف است. به علاوه، نشان دادیم که الگوریتم به یک ε-جواب بهینه برای مسایل حاصل‌ضرب دکارتی$P_*(\kappa)$-SCHLCP با پیچیدگی زمانی-چندجمله‌ای منجر می‌شود.

فهرست منابع

[1] G. Dantzig, "*Linear Programming and Extensions*," Princeton University Press, Princeton, N.J., (1963)\

[2] V. Klee, J. Minty, *"How good is the simplex algorithm? In Inequalities*," III (Proc. Third Sympos., Univ. California, Los Angeles, calif., 1969; dedicated to the memory of Theodore S. Motzkin), pp. 159-175. Academic Press, New York, (1972)

[3] L.G. Khachiyan, "A polynomial algorithm in linear programming," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol 244, pp. 1093-1096, (1979)

[4] N. Karmarkar, "New polynomial-time algorithm for linear programming," *Combinattorica,* vol 4, pp. 373-395, (1984)

[5] M. Kojima, N. Megiddo, S. Mizuno, "A primal-dual infeasible-interiorpoint algorithm for linear programming," *Mathematical Programming* vol 61, pp. 263-280, (1993)

[6] M. Kojima, N. Megiddo, T. Noma, A. Yoshise, "A Unified Approach to Interior Point Algorithms for Linear Complementarity Problems," Lecture Notes in Comput. Sci. 538, (1991) Springer-Verlag, Berlin.

[7] F. Gurtuna, C. Petra, F.A. Potra, O. Shevchenko, A. Vancea,"Corrector-predictor methods for sufficient linear complementarity problems," Computational Optimization and Applications, vol 48, pp. 453-485, (2011)

[8] B. Kheirfam, "A predictor-corrector interior-point algorithm for $P_*(\kappa)$-horizontal linear complementarity problem," Numerical Algorithms, vol 66, pp. 349-361, (2014)

[9] Z.Y. Luo, N.H. Xiu, "Path-following interior point algorithms for the Cartesian $P_*(\kappa)$-LCP over symmetric cones," Science in China Series A: Mathematics, vol. 52, pp. 1769-1784, (2009)

[10] S.H. Schmieta, F. Alizadeh, "Extension of primal-dual interior-point algorithm to symmetric cones," Mathematical Programming, vol 96, pp. 409-438, (2003)

[11] B. Kheirfam, "An interior-point method for Cartesian $P_*(\kappa)$-linear complementarity problem over symmetric cones," ORiON vol 30, pp. 41-58, (2014)

[12] W. Wang, H. Bi, H. Liu, "A full-Newton step interior-point algorithm for linear optimization based on a finite barrier," Operations Research Letters., vol 44, pp. 750-753, (2016)

[13] J. Peng, C., Roos, T. Terlaky, "Self-regular functions and new search directions for linear and semidefinite optimization," Mathematical Programming, vol 93, pp. 129-171, (2002)

[14] G. Q. Wang, Y. Q. Bai, "A class of polynomial interior-point algorithms for the Cartesian P-Matrix linear complementarity problem over symmetric cones," Journal of Optimization Theory and Applications, vol 152, pp. 739-772, (2012)

[15] G. Lesaja, G.Q. Wang, D.T. Zhu, "Interior-point methods for Cartersian

[22] J. Faraut, A. Korányi, "Analysis on symmetric cones, Oxford Mathematical Monographs," The Clarendon Press Oxford University Press, New York, (1994)

[23] L. Faybusovich, "A Jordan-algebraic approach to potential-reduction algorithms," Mathematics Z., vol 239, pp. 117-129, (2002)

[24] B. Kheirfam, N. Mahdavi-Amiri, "A new interior-point algorithm based on modified Nesterov-Todd direction for symmetric cone linear complementarity problem," Optimization Letters, vol 8, pp. 1017-1029, (2014)

[25] B. Kheirfam, N. Mahdavi-Amiri, " An infeasible interior-point algorithm based on modified Nesterov and Todd directions for symmetric linear complementarity problem," Optimization vol 64, pp. 1577-1591, (2015)

[26] B. Kheirfam, "An improved and modified infeasible interior-point method for symmetric optimization," Asian-European Journal of Mathematics, vol 9, 1650059 (13 pages), (2016)

[27] J. Peng, C. Roos, T. Terlaky, "Self-regularity: a new paradigm for primal-dual interior-point algorithms," Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, Princeton, (2002)

[28] Y. Q. Bai, M. El Ghami, C. Roos, "A comparative study of kernel functions for primal-dual interior-point algorithms in linear optimization," SIAM Journal on Optimization, vol 15, pp. 101-128, (2004)

$P_*(\kappa)$ -linear complementarity problems over symmetric cones based on the eligible kernel functions," Optimization Methods and Software, vol 27, pp. 827-843, (2012)

[16] B. Kheirfam, "A generic interior-point algorithm for monotone symmetric cone linear complementarity problems based on a new kernel function," Journal of Mathematical Modelling and Algorithms in Operations Research, vol 13, pp. 471-491, (2014)

[17] C. Roos, "A full-Newton step $O(nL)$ infeasible interior-point algorithm for linear optimization," SIAM Journal on Optimization, vol 16, pp. 1110-1136, (2006)

[18] B. Kheirfam, "A new complexity analysis for full-Newton step infeasible interior-point algorithm for horizontal linear complementarity problems," Journal of Optimization Theory and Applications, vol 161, pp. 853-869, (2014)

[19] C. Roos, "An improved and simplified full-Newton step $O(n)$ infeasible interior-point method for linear optimization," SIAM Journal on Optimization, vol 25, pp. 102-114, (2015)

[20] B. Kheirfam, "A full step infeasible interior-point method for Cartesian $P_*(\kappa)$-SCLCP," Optimization Letters, vol10, pp. 591-603, (2016)

[21] B. Kheirfam, "An improved full-Newton step $O(n)$ infeasible interior-point method for horizontal linear complementarity problem," Numerical Algorithms, vol 71, pp. 491-503, (2016)

[29] M. V. C. Vieira, “Jordan algebraic approach to symmetric optimization,” Ph.D. thesis, Delft University of Technology, (2007)

[30] G. Q. Wang, Y. Q. Bai, “A new full Nesterov-Todd step primal-dual path-following interior-point algorithm for symmetric optimization,” Journal of Optimization Theory and Applications, vol 154, pp. 966-985, (2012)

[31] F.A. Potra, J. Stoer, “On a class of superlinearly convergent polynomial time interior point methods for sufficient LCP,” SIAM Journal on Optimization, vol 20, pp. 1333-1363, (2009)

[32] Gu, G., “Full-step interior-point methods for symmetric optimization,” Ph.D. thesis, Delft University of Technology, 2009#