دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

پایداری معادلات تابعی مرتبه هفتین درفضای β-گاوسی

ناصر غفوری عدل[۱]، داود ابراهیمی بقا[۲*]، محمدصادق عسگری[۳]، مهدی آژینی[۴]

[۱ و ۴] گروه ریاضی محض (آنالیز ریاضی)، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران
[۲ و ۳] گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله:۹۷/۰۴/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۲۲

چکیده

هدف این مقاله، حل معادله تابعی از مرتبه هفتم به شکل:

$$f(x+4y)-7f(x+3y)+21f(x+2y)-35f(x+y)+21f(x-y)-7f(x-2y)+f(x-3y)=35f(x)+5040f(y)$$

و بررسی پایداری این نوع معادله تابعی می‌باشد. واضح است که تابع $f(x)=ax^7$ در معادله تابعی فوق صدق می‌کند و ما پایداری هایرز–اولام را برای این نوع معادله تابعی در فضاهای باناخ β–گاوسی ثابت می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: معادلات تابعی، پایداری نرم β–گاوسی، (β,p)–قضایای باناخ.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: e_bagha@yahoo.com

۱- مقدمه

تعریف ۱-۱: معادلات تابعی، معادله‌هایی هستند که یک تابع را به شکل ضمنی تعیین می‌کنند و در آن ضابطه‌ی تابع به صورت صریح مشخص نمی‌شود. مساله‌ی پایداری معادلات تابعی هنگامی مطرح می‌شود که معادله‌ی تابعی را با نامعادله‌هایی که به‌عنوان یک اختلال معادله عمل می‌کنند جایگزین کنیم. در واقع، مساله‌ی پایداری معادلات تابعی این طور مطرح می‌شود که چگونه جواب‌های معادله ای که اختلال آن از جواب‌های یک نامعادله داده شده ناچیز است را به دست آورد. در واقع یک معادله تابعی را پایدار می‌نامند، هرگاه برای هر تابعی که به طور تقریبی در نامعادله تابعی آن صدق کند جواب منحصر بفردی وجود داشته باشد که به آن تابع به اندازه کافی نزدیک باشد.

پایداری معادلات تابعی اولین بار درسال ۱۹۴۰ توسط ریاضیدان لهستانی آمریکایی اولام روی گروه‌های متریک به صورت زیر بیان شد.[19]

قضیه ۱-۲: (پایداری اولام) فرض کنید G_1 یک گروه و G_2 یک گروه متریپذیر با متریک d باشد، هرگاه بازای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ ای به طوری که تابع $h : G_1 \to G_2$ برای هر $x, y \in G_1$ دررابطه زیر صدق کند:

$$d\big(h(xy), h(x)h(y)\big) < \delta$$

آنگاه همریختی $H: G_1 \longrightarrow \mathrm{G}_2$ چنان وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in G_1$ داشته باشیم

$$d(h(x), H(x)) \leq \varepsilon$$

به عبارت دیگر با چه شرایطی می‌توان یک نگاشت تقریباً همریختی را به یک نگاشت همریختی نزدیک کرد؟ همچنین یک پاسخ مثبت به سئوال اولام در فضای باناخ توسط هایرز به صورت زیر ارائه شده است.[9]

قضیه ۱-۳: (پایداری هایرز) فرض کنید E_1 و E_2 فضاهائی باناخ باشند هرگاه برای $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ به طوری که تابع $f: E_1 \longrightarrow E_2$ بازای هر x و y متعلق به E_1 در رابطه زیر صدق کند:

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| < \delta$$

آن گاه برای هر $x \in E_1$ حد زیر موجود است:

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x)$$

و تابع $A: E_1 \longrightarrow E_2$ منحصر بفرد است به طوری که برای هر x متعلق به E_1 می توان نوشت:

$$\| f(x) - A(x) \| < \varepsilon$$

به علاوه اگر تابع $f(tx)$ در t بازای هر x متعلق به E_1 پیوسته باشد آن گاه تابع A خطی است.

درسال ۱۹۷۸، راسیاس تعمیم قضیه هایرز را با جایگزینی تابع کنترل به صورت

$$\theta(\|\mathrm{x^p}\| + \|\mathrm{y^p}\|)$$

برای $\theta \geq 0$ و $0 \leq p < 1$ اثبات کرد که به پایداری اولام–هایرز– راسیاس معروف می‌باشد.[15]

قضیه ۱-۴: (پایداری راسیاس) فرض کنید E_1 و E_2 فضاهائی باناخ باشند هرگاه برای $\theta \geq 0$ و $0 \leq p < 1$، تابع $f: E_1 \longrightarrow E_2$ بازای هر x و y متعلق به E_1 در رابطه زیر صدق کند:

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| < \theta(\| x^p \| + \| y^p \|)$$

آن گاه تابعی منحصربفرد $A: E_1 \longrightarrow E_2$ وجود دارد به طوری که برای هر x متعلق به E_1 می‌توان نوشت:

$$\| f(x) - A(x) \| \leq \frac{2\theta}{2-2^{\mathrm{p}}} \|x\|^{\mathrm{p}}$$

به علاوه اگر تابع $f(tx)$ در t بازای هر x متعلق به E_1 پیوسته باشد آن گاه تابع A خطی است.

همچنین یک تعمیم از قضیه راسیاس با جایگزین کردن یک تابع کنترل φ توسط گاوروتا ثابت شده است.

تعریف۱-۳: (معادلات تابعی مرتبه دوم) فرض کنید X یک فضای برداری باشد. در این صورت معادله تابعی به صورت:

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)+2f(y)$$

به ازای هر $x,y \in X$ را یک معادله تابعی مرتبه دوم می‌گویند.
هایرز پایداری معادلات تابعی مرتبه دوم را در مقالات [5, 7, 17] برای نگاشت‌های جمعی تقریبی $f: X \longrightarrow Y$ روی فضای نرمدار حقیقی X و فضای باناخ حقیقی Y مورد بررسی قرار داد. همچنین معادلات تابعی مرتبه‌های سوم در [4, 11, 13] و معادلات تابعی مرتبه چهارم در [3, 14] و معادلات تابعی مرتبه پنجم در [12, 21] و مرتبه ششم در [21] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و پایداری آنها نیز بررسی شده است.
در این مقاله ما معادلات تابعی مرتبه هفتم به فرم زیر در نظر می‌گیریم:
(۱،۱)

$$f(x+4y)-7f(x+3y)+21f(x+2y)-35f(x+y)+21f(x-y)-7f(x-2y)+f(x-3y) = 35f(x)+5040f(y)$$

به آسانی قابل تحقیق است که تابع $f(x)=\alpha x^7$ در معادله تابعی(۱،۱) صدق می کند. هدف ما بدست آوردن جواب عمومی معادله و اثبات مسئله پایداری اولام-هایرز در فضاهای باناخ $\beta-$ گاوسی برای این نوع معادله تابعی می‌باشد.

۲- معادلات تابعی مرتبه هفتم

تعریف۲-۱: فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد در این صورت مجموعه

$$\overbrace{X\times X\times\cdots\times X}^{n-times}$$

را با علامت X^n نمایش می‌دهیم همچنین برای یک نگاشت متقارن n-جمعی

$$A: X^n \to Y$$

نگاشت

$$A^n(x) = A(\overbrace{x,x,\cdots,x}^{n-times})$$

را به عنوان قطر نگاشت A و مقدار

$$A(\overbrace{x,x,\cdots,x}^{i-times},\overbrace{y,y,\cdots,y}^{j-times})$$

را با علامت $A^{i,j}(x,y)$ نمایش می‌دهیم.
اکنون معادله تابعی مرتبه هفتم (۱،۱) را به صورت زیر حل می‌کنیم.

قضیه۲-۲: فرض کنید X و Y فضاهائی برداری باشند، تابع $f: X \to Y$ یک جواب معادله تابعی (۱،۱) است اگر و فقط اگر f به ازای هر $x \in X$ به فرم $f(x)=A^7(x)$ باشد.

اثبات: فرض کنید f در معادله تابعی (۱،۱) صدق کند با قرار دادن $x=y=0$ در (۱،۱)، نتیجه می‌شود $f(0)=0$ و با جایگزینی (x,y) با $(0,x)$ و $(x,-x)$ به ترتیب در (۱،۱) و جمع دو رابطه بدست آمده نتیجه می‌گیریم:

$$f(-x)=-f(x)$$

باتعویض (x,y) با $(4x,x)$ در (۱،۱) به ازای هر $x \in X$ داریم:
(۱،۲)

$$f(8x)-7f(7x)+21f(6x)-35f(5x)+35f(4x)-21f(3x)+7f(2x) = 5041f(x)$$

و همچنین تعویض (x,y) با $(0,2x)$ در(۱،۱) به

ازای هر $x \in X$ نتیجه می‌دهد:

(۲،۲)

$$f(8x) - 6f(6x) + 14f(4x) - 5054f(2x) = 0$$

با تفاضل دو رابطه (۱،۲) و (۲،۲) خواهیم داشت:

(۳،۲)

$$-7f(7x) - 27f(6x) - 35f(5x) + 21f(4x) - 21f(3x) + 5061f(2x) = 5041f(x)$$

با جایگذاری (x, y) با $(3x, x)$ در (۱،۱) نتیجه می‌شود:

(۴،۲)

$$f(7x) - 7f(6x) + 21f(5x) - 35f(4x) - 35f(3x) - 21f(2x) = 5033f(x)$$

با ضرب عدد ۷ در طرفین این معادله و جمع آن با (۳،۲) نتیجه می‌دهد:

(۵،۲)

$$-22f(6x) + 112f(5x) - 224f(4x) + 224f(3x) + 4914f(2x) = 40272f(x)$$

با قرار دادن $(2x, x)$ بجای (x, y) در (۱،۱) داریم:

(۶،۲)

$$f(6x) - 7f(5x) + 21f(4x) - 35f(3x) + 35f(2x) = 5060f(x)$$

حال ضرب معادله (۶،۲) در (۲،۲) و ترکیب آن با نتیجه بدست آمده از رابطه (۱،۱) بدست می‌آید:

(۷،۲)

$$-21f(5x) + 119f(4x) - 273f(3x) + 2842f(2x) = 75796f(x)$$

قرار دادن (x, y) با (x, x) در (۱،۱) نتیجه می‌دهد:

(۸،۲)

$$f(5x) - 7f(4x) + 21f(3x) - 34f(2x) = 5012f(x)$$

با استفاده از روابط (۷،۲) و (۸،۲) نتیجه می‌شود:

(۹،۲)

$$-28f(4x) + 168f(3x) + 2128f(2x) = 181048f(x)$$

و تعویض (x, y) با $(-x, x)$ در(۱،۱) ما را به رابطه زیر راهنمائی می‌کند:

(۱۰،۲)

$$f(4x) - 6f(3x) + 14f(2x) = 5054f(x)$$

و سرانجام با ادغام روابط (۹،۲) و (۱۰،۲) به ازای هر $x \in X$ خواهیم داشت:

(۱۱،۲)

$$f(2x) = 2^7 f(x)$$

بالعکس می‌توانیم نشان دهیم که معادله تابعی (۱،۱) به ازای هر $x, y \in X$ به شکل:

(۱۲،۲)

$$f(x) + \frac{1}{35}f(x+4y) - \frac{1}{5}f(x+3y) + \frac{3}{5}f(x+2y) - f(x+y) - \frac{3}{5}f(x-y) + \frac{1}{5}f(x-2y) - \frac{1}{35}f(x-3y) - 144f(y) = 0$$

می‌باشد و این نشان می‌دهد f یک تابع چند جمله‌ای

تعمیم یافته از درجه حداکثر 7 است اکنون با استفاده از قضایای 3.5 و 3.6 از مرجع [20] نتیجه می‌شود که f به شکل زیر است:
(۱۳،۲)

$$f(x) = \sum_{i=0}^{7} A^i(x)$$

است که $A^0(x) = A^0$ یک عضو اختیاری از Y است. از این که به ازای هر

$x \in X$ ،$f(0)=0$ و

$$f(-x) = -f(x)$$

نتیجه می‌شود $A^0(x) = A^0 = 0$ و تابع f فرد است. بنابراین

$$A^2(x) = A^4(x) = A^6(x) = 0$$

و این ایجاب می‌کند که:

$$f(x) = A^7(x) + A^5(x) + A^3(x) + A^1(x) \qquad \forall x \in X$$

از (۱۱،۲) و این که

$$A^n(rx) = r^n A^n(x)$$

به ازای $x \in X$ و $r \in Q$ و جایگذاری $2x$ بجای x در معادله اخیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 2^7A^7(x) + 2^5A^5(x) + 2^3A^3(x) \\ + 2A^1(x) \\ = 2^7A^7(x) + 2^7A^5(x) \\ + 2^7A^3(x) + 2^7A^1(x) \end{aligned}$$

این نشان می دهد:

$$A^1(x) = A^3(x) = A^5(x) = 0$$

بنابراین $f(x) = A^7(x)$.
بالعکس فرض کنید به ازای هر $x \in X$، $f(x) = A^7(x)$
در این صورت به ازای هر $x, y \in X, r \in Q$:

$$\begin{aligned} A^7(x+y) = A^7(x) + A^7(y) \\ + 7A^{6,1}(x,y) \\ + 21A^{5,2}(x,y) \\ + 35A^{4,3}(x,y) \\ + 35A^{3,4}(x,y) \\ + 21A^{2,5}(x,y) \\ + 7A^{1,6}(x,y) \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} &A^7(rx) = r^7A^7(x), \\ &A^{6,1}(x,ry) = r^{6,1}A^{5,2}(x,ry), \\ &A^{5,2}(x,ry) = r^2A^{5,2}(x,ry), \\ &A^{4,3}(x,ry) = r^3A^{4,3}(x,ry), \\ &A^{3,4}(rx) = r^4A^{3,4}(x,ry), \\ &A^{2,5}(x,ry) = r^5A^{2,5}(x,ry), \\ &A^{1,6}(x,ry) = r^6A^{1,6}(x,ry). \end{aligned}$$

معادلات فوق نشان می‌دهد که f در (۱،۱) صدق می‌کند و این اثبات را تکمیل می‌کند.

۳- پایداری معادلات تابعی مرتبه هفتم در فضاهای نرمدار $\boldsymbol{\beta}$-گاوسی

در این بخش ما ابتدا برخی مفاهیم اصلی در فضاهای نرمدار $\beta-$گاوسی را یادآوری می‌کنیم.

تعریف۳-۱: فرض کنید β یک عدد حقیقی با شرط $0<\beta<1$ و $\mathbb{K}$ میدان اعداد حقیقی یا مختلط $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد و X یک فضای خطی روی $\mathbb{K}$ باشد، در این صورت تابع $\|.\|: X \to [0,\infty)$ را یک نرم $\beta-$ گاوسی روی X می‌نامند هرگاه شرایط زیر برای آن برقرار باشند به ازای هر $x \in X$و $t \in \mathbb{K}$ و $K \geq 0$

(1) $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $\|tx\| = |t|^\beta \|x\|$

(3) $\|x+y\| \leq K(\|x\| + \|y\|)$

توجه داشته باشید که شرط (۳) ایجاب می‌کندکه به ازای

هر $n \geq 1$ و $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1} \in X$:

$$\left\|\sum_{j=1}^{2n} x_j\right\| \leq K^n \sum_{j=1}^{2n} \|x_j\|$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{2n+1} x_j\right\| \leq K^{n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \|x_j\|$$

تعریف۳-۲: یک نرم β–گاوسی $\|\cdot\|$ ، را یک (β, p)–نرم $(0 < p \leq 1)$ روی X نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x, y \in X$

$$\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p .$$

در این حالت یک فضای باناخ β–گاوسی، را یک (β, p)–فضای باناخ نامیده می‌شود.

چون هر p–نرم روی فضای خطی X یک متریک پایای تحت انتقال روی X را به ما می‌دهد و چون هر نرم β–گوسی با یک p–نرم معادل است[2, 16]. بنابراین از این ببعد در این مقاله ما روی p–نرم ها تمرکز می‌کنیم و X را یک فضای خطی با نرم $\|\cdot\|_X$ و Yرا یک (β, p)–فضای باناخ با (β, p)–نرم $\|\cdot\|_Y$ و K را مدول تقسیم $\|\cdot\|_Y$ در نظر می‌گیریم.(مگر این که صراحتاً اعلام شود). در ادامه این بخش پایداری معادله (۱،۱) را با بکار بردن ایده گاوروتا [6] اثبات می‌کنیم.

تعریف۳-۳: فرض کنید $f: X \to Y$ ی‌ک تابع باشد در این صورت انحراف تابع f به ازای هر $x, y \in X$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} D_h f(x,y) = {} & f(x+4y) \\ & - 7f(x+3y) \\ & + 21f(x+2y) \\ & - 35f(x+y) \\ & + 21f(x-y) \\ & - 7f(x-2y) \\ & + f(x-3y) \\ & - 35f(x) - 5040f(y) \end{aligned}$$

برای اثبات قضیه پایداری که نتیجه اصلی این بخش است به لم زیر از [21] نیاز خواهیم داشت:

لم۳-۴: فرض کنید $j \in \{-1,1\}$ یک مقدار ثابت بوده و $a, s \in \mathbb{N}$ با $a \geq 2$ و $\psi: X \to [0,\infty)$ یک تابع باشد بقسمی که یک $L < 1$ با $\psi(a^j x) < La^{js\beta}\psi(x)$ وجود داشته باشد.اگر $f: X \to Y$ بازای هر $x \in X$ یک نگاشت صدق کننده در

$$\|f(ax) - a^s f(x)\|_Y \leq \psi(x)$$

باشد آنگاه یک نگاشت یکتای معین $F: X \to Y$ وجود خواهد داشت که بازای هر $x \in X$:

$$F(ax) = a^s F(x),$$

$$\|f(x) - F(x)\|_Y \leq \frac{1}{a^{s\beta}\,|1-L^j|}\psi(x).$$

در نتیجه بعدی، ما پایداری معادله تابعی (۱،۱) را درفضاهای نرمدار β–گاوسی اثبات می‌کنیم.

قضیه۳-۵: فرض کنید $j \in \{-1,1\}$ یک عدد ثابت و $\varphi: X \times X \to [0,\infty)$ را تابعی در نظر بگیرید بقسمی که یک $L < 1$ با شرط

$$\varphi(2^j x, 2^j y) \leqslant 2^{7j\beta} L\varphi(x,y)$$

وجود داشته باشد. فرض کنید $f: X \to Y$ یک نگاشت باشد که بازای هر $x, y \in X$ در شرط زیر صدق کند:

(۱،۳)

$$\|D_h f(x,y)\|_Y \leqslant \varphi(x,y)$$

در این صورت یک نگاشت هفتین یکتای مانند $H: X \to Y$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$:

(۲،۳)

$$\|f(x) - H(x)\|_Y \leqslant \frac{1}{2^{7\beta}\,|1-L^j|}\varphi(x)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(x) := &\frac{1}{2520^{\beta}}[28^{\beta} K^{2}\varphi(-x,x)\\ &+21^{\beta} K^{4}\varphi(x,x) +22^{\beta} K^{5}\varphi(2x,x)\\ &+7^{\beta} K^{5}\varphi(3x,x)\\ &+K^{7}(\varphi(4x,x) +\varphi(0,2x))\\ &+\frac{K^{8}}{5040^{\beta}}(\varphi(0,6x) +\varphi(6x,-6x))\\ &+(\frac{28^{\beta}K^{4}}{5040^{\beta}}+\frac{K^{9}}{720^{\beta}})\\ &\times(\varphi(0,4x) +\varphi(4x,-4x))\\ &+\frac{28^{\beta}K^{6}+K^{6}+K^{9}}{240^{\beta}}\\ &\times(\varphi(0,2x)+\varphi(2x,-2x))\\ &+(\frac{28^{\beta}K^{6}}{5040^{\beta}}+\frac{21^{\beta}}{720^{\beta}}720^{\beta}K^{5}+\frac{22^{\beta}}{5040^{\beta}}K^{8})\\ &\times(\varphi(0,x)+\varphi(x,-x))\\ &+\frac{28^{\beta}K^{5}}{720^{\beta}}(\varphi(0,3x)+\varphi(3x,-3x))\\ &+\frac{1309^{\beta}K}{5040^{\beta}}(\varphi(0,0)].\end{aligned}$$

اثبات: با قرار دادن $x = y = 0$ در (۱،۱)بدست می‌آوریم که بازای هر $x \in X$:

(۳،۳)

$$\|f(0)\|_Y \leqslant \frac{1}{5040^{\beta}}\varphi(0,0)$$

با تعویض (x,y) با $(0,x)$ در (۱،۳) خواهیم داشت:

(۴،۳)

$$\begin{aligned}&\|f(4x)-7f(3x)+21f(2x)\\ &\qquad -35f(x)\|_Y \leqslant \varphi(0,x)\end{aligned}$$

جابجائی (x,y) با $(x,-x)$ در (۱،۳) نتیجه می‌دهد:

(۵،۳)

$$\begin{aligned}&\|f(-3x)-7f(-2x)+21f(-x)\\ &-35f(0)+35f(x)-21f(2x)\\ &+7f(3x)-f(4x)\\ &-5040f(-x)\|_Y \leqslant \varphi(x,-x)\end{aligned}$$

با استفاده از روابط (۴،۳) و (۵،۳) بدست می‌آوریم:

(۶،۳)

$$\begin{aligned}&\|f(x)+f(-x)\|_Y \leqslant\\ &\qquad \frac{K}{5040^{\beta}}(\varphi(0,x)+\varphi(x,-x))\end{aligned}$$

جایگزینی (x,y) با $(4x,x)$ در (۱،۳) خواهد داد:

(۷،۳)

$$\begin{aligned}&\|f(8x)-7f(7x)+21f(6x)-35f(5x)\\ &+35f(4x)-21f(3x)+7f(2x)\\ &-5041f(x)\|_Y \leqslant \varphi(4x,x)\end{aligned}$$

دوباره با جایگزینی (x,y) با $(0,2x)$ در (۱،۳) داریم:

(۸،۳)

$$\begin{aligned}&\|f(8x)-7f(6x)+21f(4x)\\ &-5075f(2x)+35f(0)\\ &-21f(-2x)+7f(-4x)\\ &-f(-6x)\|_Y \leqslant \varphi(0,2x)\end{aligned}$$

تفاضل روابط (۷،۳) و (۸،۳) و بکار بردن رابطه (۶،۳) نتیجه می‌شود:

(۹،۳)

$$\begin{aligned}&\|-7f(7x)+27f(6x)-35f(5x)\\ &+21f(4x)-21f(3x)+5061f(2x)\\ &-5041f(x)-35f(0)\|_Y \leqslant\end{aligned}$$

$$K^2[\varphi(4x,x)+\varphi(0,2x)]$$
$$+\frac{K^3}{2^{7\beta}}(\varphi(0,6x)+\varphi(6x,-6x))$$
$$+\frac{K^4}{720^\beta}(\varphi(0,4x)+\varphi(4x,-4x))$$
$$+\frac{K^4}{240^\beta}(\varphi(0,2x)+\varphi(2x,-2x))$$

حال با جایگذاری $(3x,x)$بجای (x,y) در (۱،۳) خواهیم داشت:

(۱۰،۳)

$$\|f(7x)-7f(6x)+21f(5x)-35f(4x)$$
$$+35f(3x)-21f(2x)-5033f(x)$$
$$-f(0)\|_Y\leqslant\varphi(3x,x)$$

با ضرب طرفین معادله(۱۰،۳) در 7^β و سپس اضافه کردن نتیجه آن به (۹،۳) حاصل خواهد شد:

(۱۱،۳)

$$\|-22f(6x)+112f(5x)-224f(4x)$$
$$+224f(3x)+4914f(2x)$$
$$-40272f(x)-42f(0)\|_Y$$
$$\leqslant 7^\beta K\varphi(3x,x)$$
$$+K^3[\varphi(4x,x)+\varphi(0,2x)]$$
$$+\frac{K^4}{5040^\beta}(\varphi(0,6x)+\varphi(6x,-6x))$$
$$+\frac{K^5}{720^\beta}(\varphi(0,4x)+\varphi(4x,-4x))$$
$$+\frac{K^5}{240^\beta}(\varphi(0,2x)+\varphi(2x,-2x))$$

با جایگزین کردن (x,y) با $(2x,x)$ در (۱،۳) و بکار بردن (۶،۳) حاصل می‌گردد:

(۱۲،۳)

$$\|f(6x)-72f(5x)+21f(4x)$$
$$-35f(3x)+35f(2x)-5060f(x)$$
$$+7f(0)\|_Y\leqslant K\varphi(2x,x)$$
$$+\frac{K^2}{5040^\beta}[\varphi(0,x)+\varphi(x,-x)]$$

ضرب طرفین معادله (۱۲،۳)در 22^βو سپس استفاده از آن در (۱۱،۳) نتیجه می‌دهد:

(۱۳،۳)

$$\|-21f(5x)+119f(4x)-273f(3x)$$
$$+2842f(2x)-75796f(x)+112f(0)\|_Y$$
$$\leqslant 22^\beta K^2\varphi(2x,x)+7^\beta K^2\varphi(3x,x)$$
$$+K^4(\varphi(4x,x)+\varphi(0,2x))$$
$$+\frac{K^5}{5040^\beta}(\varphi(0,6x)+\varphi(6x,-6x))$$
$$+\frac{K^6}{720^\beta}(\varphi(0,4x)+\varphi(4x,-4x))$$
$$+\frac{K^6}{240^\beta}(\varphi(0,2x)+\varphi(2x,-2x))$$
$$+\frac{22^\beta K^3}{5040^\beta}(\varphi(0,x)+\varphi(x,-x))$$

مجدداً با تعویض (x,y)با (x,x) در (۱،۳) و بکار بردن نامساوی (۶،۳) بدست می‌آوریم:

(۱۴،۳)

$$\|f(5x)-7f(4x)+21f(3x)$$
$$-34f(2x)-5012f(x)-21f(0)\|_Y$$
$$\leqslant K\varphi(x,x)$$
$$+\frac{K^3}{720^\beta}(\varphi(0,x)+\varphi(x,-x))$$
$$+\frac{K^3}{5040^\beta}(\varphi(0,2x)+\varphi(2x,-2x))$$

ازضرب هر دوطرف (۱۴،۳) در 21^β وترکیب نتیجه آن با رابطه (۱۳،۳) داریم:

(۱۵،۳)

$$\|-28f(4x)+168f(3x)+2128f(2x)$$

$$-181048f(x)-329f(0)\|_Y$$
$$\leqslant 21^{\beta}K^{2}\varphi(x,x)+22^{\beta}K^{3}\varphi(2x,x)$$
$$+\frac{K^{6}}{5040^{\beta}}(\varphi(0,6x)+\varphi(6x,-6x))$$
$$+7^{\beta}K^{3}\varphi(3x,x)$$
$$+K^{5}(\varphi(4x,x)+\varphi(0,2x))$$
$$+\frac{K^{7}}{720^{\beta}}(\varphi(0,4x)+\varphi(4x,-4x))$$
$$+\frac{K^{4}+K^{7}}{240^{\beta}}(\varphi(0,2x)+\varphi(2x,-2x))$$
$$+\frac{21^{\beta}}{720^{\beta}}720^{\beta}K^{3}$$
$$+\frac{22^{\beta}}{5040^{\beta}}K^{6}(\varphi(0,x)+\varphi(x,-x))$$

جابجائی (x,y) با $(-x,x)$ در (۱،۳) و بکارگیری (۶،۳) نتیجه می‌دهد:

(۱۶،۳)

$$\|f(4x)-6f(3x)+14f(2x)$$
$$-5040f(x)-35f(0)\|_Y$$
$$\leqslant K\varphi(-x,x)$$
$$+\frac{K^{2}}{5040^{\beta}}(\varphi(0,4x)+\varphi(4x,-4x))$$
$$+\frac{K^{3}}{720^{\beta}}(\varphi(0,3x)+\varphi(3x,-3x))$$
$$+\frac{K^{4}}{240^{\beta}}(\varphi(0,2x)+\varphi(2x,-2x)$$
$$+\frac{K^{4}}{5040^{\beta}}(\varphi(0,x)+\varphi(x,-x))$$

با استفاده از روابط (۱۵،۳) و (۱۶،۳) که در 28^{β} ضرب شده و سپس اعمال (۶،۳) در آن خواهیم داشت:

$$\|f(2x)-2^{7}f(x)\|_Y\le\tilde{\varphi}(x)\qquad(x\in X)$$

حال با توجه به لم ۳-۴ یک نگاشت یکتای

$$H:X\to Y$$

وجود دارد به قسمی که

$$H(2x)=2^{7}H(x)$$

و به ازای هر $x\in X$ نتیجه می‌شود:

(۱۷،۳)

$$\|f(x)-H(x)\|_Y\leqslant\frac{1}{2^{7\beta}|1-L^{j}|}\tilde{\varphi}(x)$$

حال کافی است نشان دهیم H یک نگاشت هفتین است. برای این منظور از (۱،۳) بازای هر $x,y\in X$ و $n\in N$ داریم:

$$\left\|\frac{D_hf(2^{jn}x,2^{jn}y)}{2^{7jn}}\right\|_Y$$
$$\leqslant 2^{-7jn\beta}\varphi(2^{jn}x,2^{jn}y)$$
$$\leqslant 2^{-7jn\beta}(2^{-7jn\beta}L)^{n}\varphi(x,y)$$
$$=L^{n}\varphi(x,y)$$

باقرار دادن $n\to\infty$ در نامساوی فوق، مشاهده می‌شود که به ازای هر $x,y\in X$ داریم $D_hH(x,y)=0$.
بنابراین نگاشت H ضرورتاً هفتین است.
گزاره‌های زیر، نتیجه مستقیم قضیه ۳-۵ می‌باشند.

گزاره۳-۶: فرض کنید X یک فضای نرمدار α-گاوسی با α- نرم $\|\cdot\|_X$ و Y یک (β,p)- فضای باناخ با (β,p)-نرم $\|\cdot\|_Y$ باشند و فرض کنید r و s اعدادی مثبت با شرط $\lambda:=r+s\neq 7\frac{\beta}{\alpha}$ باشند. اگر $f:X\to Y$ به ازای هر $x,y\in X$ یک نگاشت صادق در شرط:

$$\|D_hf(x,y)\|_Y\leqslant\theta\|x\|_X^{r}\|y\|_X^{s}$$

باشد دراین صورت یک نگاشت یکتای هفتین $H:X\to Y$ وجود دارد به قسمی که بازای هر $x\in X$:

$$\|f(x)-H(x)\|_Y$$

$$\le \begin{cases} \dfrac{\theta\Lambda_{r,s}}{2^{7\beta}-2^{\alpha\lambda}}\|x\|_X^{\lambda}, & \lambda\in(0,7\dfrac{\beta}{\alpha}) \\ \dfrac{2^{\alpha\lambda}\theta\Lambda_{r,s}}{2^{\alpha\lambda}-2^{7\beta}}\|x\|_X^{\lambda}, & \lambda\in(7\dfrac{\beta}{\alpha},\infty)\end{cases}$$

که در آن:

(۱۸،۳)

$$\Lambda_{r,s}=\frac{1}{2520^\beta}[28^\beta K^2+(21^\beta+\frac{4^{\alpha\lambda}}{180^\beta})K^4 +(2^{\alpha r}\cdot 22^\beta+3^{\alpha r}\cdot 7^\beta+\frac{7^\beta}{240^\beta}+ \frac{7^\beta}{180^\beta}3^{\alpha r})K^5+(\frac{7^\beta}{60^\beta}2^{\alpha r}+\frac{2^{\alpha\lambda}}{240^\beta}+\frac{1}{180^\beta})K^6+4^{\alpha\lambda}K^7+(\frac{6^{\alpha\lambda}}{5040^\beta}+\frac{11^\beta}{2520^\beta})K^8+(\frac{4^{\alpha\lambda}}{720^\beta}+\frac{2^{\alpha\lambda}}{240^\beta})K^9]$$

گزاره۳-۷: فرض کنید X یک فضای نرمدار $\alpha-$ گاوسی با $\alpha-$ نرم $\|\cdot\|_X$ و Y یک $(\beta,p)-$ فضای باناخ با $(\beta,p)-$نرم $\|\cdot\|_Y$ باشند و فرض کنید r و s اعدادی مثبت با شرط $\lambda\neq 7\frac{\beta}{\alpha}$ باشد. اگر $f:X\to Y$ به ازای هر $x,y\in X$ یک نگاشت صادق در شرط:

$$\|D_h f(x,y)\|_Y\leqslant\theta(\|x\|_X^{\lambda}+\|y\|_X^{\lambda})$$

باشد آنگاه یک نگاشت یکتای هفتین $H:X\to Y$ وجود دارد به قسمی که بازای هر $x\in X$:

$$\|f(x)-H(x)\|_Y \le \begin{cases} \dfrac{\theta\Gamma_{\lambda}}{2^{7\beta}-2^{\alpha\lambda}}\|x\|_X^{\lambda}, & \lambda\in(0,7\dfrac{\beta}{\alpha}) \\ \dfrac{2^{\alpha\lambda}\theta\Gamma_{\lambda}}{2^{\alpha\lambda}-2^{7\beta}}\|x\|_X^{\lambda}, & \lambda\in(7\dfrac{\beta}{\alpha},\infty)\end{cases}$$

که در آن:

(۱۹،۳)

$$\Gamma_\lambda=\frac{1}{2520^\beta}[2\cdot 28^\beta K^2+(2\cdot 21^\beta+3\frac{4^{\alpha\lambda}}{180^\beta})K^4+((2^{\alpha\lambda}+1)22^\beta+(3^{\alpha\lambda}+1)7^\beta+3\frac{7^\beta}{240^\beta}+3\frac{7^\beta}{180^\beta}3^{\alpha\lambda})K^5+(3\frac{1+28^\beta}{240^\beta}2^{\alpha\lambda}+\frac{3}{180^\beta})K^6+(1+2^{\alpha\lambda}+4^{\alpha\lambda})K^7+(3\frac{6^{\alpha\lambda}}{5040^\beta}+3\frac{11^\beta}{2520^\beta})K^8+(3\frac{4^{\alpha\lambda}}{720^\beta}+3\frac{2^{\alpha\lambda}}{240^\beta})K^9]$$

گزاره۳-۸: فرض کنید X یک فضای نرمدار $\alpha-$ گاوسی با $\alpha-$ نرم $\|\cdot\|_X$ و Y یک $(\beta,p)-$ فضای باناخ با $(\beta,p)-$نرم $\|\cdot\|_Y$ باشند و فرض کنید r,θ و s اعدادی مثبت با شرط $\lambda:=r+s\neq 7\frac{\beta}{\alpha}$ باشند اگر $f:X\to Y$ به ازای هر $x,y\in X$ یک نگاشت صادق در شرط:

$$\|D_h f(x,y)\|_Y\leqslant\theta(\|x\|_X^{\lambda}+\|y\|_X^{\lambda}+\|x\|_X^{r}\|y\|_X^{s})$$

باشد آنگاه یک نگاشت یکتای هفتین $H:X\to Y$ وجود دارد به قسمی که بازای هر $x\in X$:

$$\|f(x)-H(x)\|_Y \le \begin{cases} \dfrac{\theta(\Lambda_{r,s}+\Gamma_{\lambda})}{2^{7\beta}-2^{\alpha\lambda}}\|x\|_X^{\lambda} & \lambda\in(0,7\dfrac{\beta}{\alpha}) \\ \dfrac{2^{\alpha\lambda}\theta(\Lambda_{r,s}+\Gamma_{\lambda})}{2^{\alpha\lambda}-2^{7\beta}}\|x\|_X^{\lambda} & \lambda\in(7\dfrac{\beta}{\alpha},\infty)\end{cases}$$

که درآن $\Lambda_{r,s}$ و Γ_λ به ترتیب در روابط (۱۸،۳) و(۱۹،۳) تعریف شده‌اند.

ایده مثال زیر از [8] گرفته شده است. اثبات‌ها مشابه است ولی ما آن را تکمیل کرده‌ایم. در حقیقت نشان

می‌دهیم که فرض $\lambda \neq 7\dfrac{\beta}{\alpha}$ در حالت $\alpha = \beta = p = 1$ کار نمی‌کند.

مثال۳-۹: فرض کنید $f : R \to R$ تعریف شده برای هر $x \in R$ به صورت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\psi(4^n x)}{2^{14n}}$ باشد که تابع $\psi : R \to R$ به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$\psi(x) = \begin{cases} x^7 & |x| < 1 \\ 1 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

بدیهی است که f به $\dfrac{2^{14}}{2^{14}-1}$ کراندار است. اگر $|x|^7 + |y|^7 = 0$ یا $|x|^7 + |y|^7 \geq 2^{-14}$. در این صورت:

(۲۰،۳)

$$|D_h f(x,y)| \leq 5168 \frac{2^{14}}{2^{14}-1}$$
$$\leq 5168 \frac{2^{28}}{2^{14}-1}(|x|^7 + |y|^7)$$

و اگر $|x|^7 + |y|^7 < 2^{-14}$ در این صورت یک عدد صحیح نامنفی kوجود دارد به قسمی که:

(۲۱،۳)

$$2^{-14(k+2)} < |x|^7 + |y|^7 < 2^{-14(k+1)}$$

رابطه (۲۱،۳) ایجاب می‌کند:

$$2^{14}|x|^7 < 2^{-14}, 2^{14}|y|^7 < 2^{-14}$$

و تمام اعداد

$$4^n(x+4y), 4^n(x+3y),$$
$$4^n(x+2y), 4^n(x+y),$$
$$4^n(x-y), 4^n(x-2y),$$
$$4^n(x-3y), 4^n x, 4^n y$$

به ازای هر $n = 0,1,\cdots,k-1$ به $(-1,1)$ تعلق داشته باشند. بنابراین به ازای هر $n = 0,1,\cdots,k-1$:

$$\psi(4^n(x+4y)) - 7\psi(4^n(x+3y))$$
$$+21\psi(4^n(x+2y))$$
$$-35\psi(4^n(x+y)) + 21\psi(4^n(x-y))$$
$$-7\psi(4^n(x-2y))$$
$$+\psi(4^n(x-3y)) - 35\psi(4^n x)$$
$$-5040\psi(4^n y) = 0$$

با استفاده از تعریف f خواهیم داشت:

$$|D_h f(x,y)| = |\sum_{n=k}^{\infty}\{2^{-14}\psi(4^n(x+4y))$$
$$-7\cdot 2^{-14}\psi(4^n(x+3y))$$
$$+21\cdot 2^{-14}\psi(4^n(x+2y))$$
$$-35\cdot 2^{-14}\psi(4^n(x+y))$$
$$+21\cdot 2^{-14}\psi(4^n(x-y))$$
$$-7\cdot 2^{-14}\psi(4^n(x-2y))$$
$$+2^{-14}\psi(4^n(x-3y))$$
$$-35\cdot 2^{-14}\psi(4^n x)$$
$$-5040\cdot 2^{-14}\psi(4^n y)\}|$$
$$\leq \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-14}|\psi(4^n(x+4y))$$
$$-7\psi(4^n(x+3y))$$
$$+21\psi(4^n(x+2y))$$
$$-35\psi(4^n(x+y))$$
$$+21\psi(4^n(x-y))$$
$$-7\psi(4^n(x-2y))$$
$$+\psi(4^n(x-3y))$$
$$-35\psi(4^n x) - 5040\psi(4^n y)|$$
$$\leq 5168\sum_{n=k}^{\infty} 2^{-14n} = 5168\frac{2^{14(1-k)}}{2^{14}-1}$$

با استفاده از روابط فوق و نامساوی (۲۱،۳) نتیجه

می‌گیریم که بازای هر $x, y \in R$:
(۲۲،۳)

$$D_h f(x, y) |\leq 5168 \frac{2^{42}}{2^{14}-1}(|x|^7+|y|^7)$$

حال در گزاره ۳-۶ اگر $\alpha=\beta=p=1$ آنگاه نشان می‌دهیم معادله تابعی (۱،۱) به ازای $\lambda=7$ پایدار نیست؟ بر خلاف این ادعا فرض کنید یک عدد $b \in [0, \infty)$ و یک تابع هفتین $H: R \to R$ وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر $x \in R$

$$|f(x)-H(x)|<b|x|^7$$

در نتیجه بنا به [10] یک عدد $a \in R$ وجود دارد که به ازای هر $r \in Q$، $H(r)=ar^7$. بنابراین به ازای هر $r \in Q$ خواهیم داشت:
(۲۳،۳)

$$|f(r)| \leq (|a|+b)|r|$$

فرض کنید $m \in N$ طوری باشدکه:

$$m+1>|a|+b$$

اگر r_0 یک عدد گویای در بازه $(0, 4^{-m})$ باشد در این صورت به ازای هر $n=0,1,\cdots,m$ داریم $4^n r_0 \in (0,1)$ در نتیجه برای چنین r_0 ای نتیجه می شود:

$$f(r_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi(4^n r_0)}{2^{14n}} \geq \sum_{n=0}^{m}\frac{(4^n r_0)^7}{2^{14n}}$$
$$=(m+1)r_0^7>(|a|+b)r_0^7$$

که با (۲۳،۳) تناقض دارد بنابراین فرض خلف باطل و در نتیجه حکم برقرار است.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله ما جواب‌های کلی معادله تابعی از مرتبه هفتین را بدست آورده‌ایم و سپس پایداری این نوع معادله تابعی را مورد بررسی قرار داده‌ایم. همچنین ما پایداری هایرز-اولام را برای این نوع معادله تابعی در فضاهای باناخ β-گاوسی ثابت کرده‌ایم.

سپاسگزاری

نویسندگان مایل هستند که از زحمات داوران و ناظران ناشناس در خصوص مطالعه دقیق مقاله و ارائه نظرات مفیدشان که به بهبود مقاله کمک کرده قدردانی و تشکر کنند. کار پژوهشی نویسندگان توسط دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات پشتیبانی می‌شود.

فهرست منابع

[1] T. Aoki, On the stability of the linear transformation in Banach spaces, J. Math. Soc. Japan. 2: 64-66 (1950).

[2] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, Geometric nonlinear functional analysis, Vol. 1, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 48. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2000.

[3] A. Bodaghi, Stability of a quartic functional equation, The Scientific World Journal. Vol. 2014, 9 pages, Article ID 752146.

[4] A. Bodaghi, S. M. Moosavi, H. Rahimi, The generalized cubic functional equation and the stability of cubic Jordan *-derivations, Ann. Univ. Ferrara, 59: 235-250 (2013).

[5] S. Czerwik, On the stability of the quadratic mapping in normed spaces, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 62: 59-64 (1992).

[6] M. Eshaghi Gordji, A. Bodaghi, On the Hyers-Ulam-Rassias stability problem for quadratic functional equations East. J. Approx. 16:123-130 (2010).

[7] Z. Gajda, On stability of additive mappings, Int. J. Math. Math. Sci. 14 (3): 431-434 (1991).

[8] D. H. Hyers, On the stability of the linear functional equation, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 27: 222-224 (1941).

[9] K. W. Jun, H. M. Kim, On the stability of Euler-Lagrange type cubic mappings in quasi-Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 332 (2): 1335-1350 (2007).

[10] K. W. Jun. H. M. Kim, The generalized Hyers-Ulam-Russias stability of a cubic functional equation, J. Math. Anal. Appl. 274 (2):867-878 (2002).

[11] C. Park, J. Cui, M. Eshaghi Gordji, Orthogonality and quintic functional equations. Acta Math. Sinica English Series. 29: 1381-1390 (2013).

[12] J. M. Rassias, Solution of the Ulam stability problem for cubic mapping, Glasnik Matematicki Ser III. 36 (56): 63-72 (2001).

[13] J. M. Rassias, Solution of the Ulam stability problem for quartic mapping, Glasnik Matematicki Ser III. 34 (2): 243-252 (1999).

[14] Th. M. Rassias, On the stability of the linear mapping in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 72 (2): 297-300 (1978).

[15] S. Rolewicz, Metric linear spaces Second Edition. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, (1984).

[16] F. Skof, Propriet locali e approssimazione di operatori, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 53: 113-129 (1983).

[17] J. Tabor, Stability of the Cauchy functional equation in quasi-Banach spaces. Ann. Polon. Math. 83: 243-255 (2004).

[18] S. M. Ulam, Problems in Modern Mathematics, Chapter VI, Science Ed., Wiley, New York, (1940).

[19] T. Z. Xu, M. Rassias, W. X. Xu, A generalized mixed quadratic-quartic

functional equation, Bulletin Malay. Math. Sci. Soc. 35 (3): 633-649 (2012).

[20] T. Z. Xu, J. M. Rassias, M. J. Rassias, W. X. Xu, A fixed point approach to the stability of quintic and sextic functional equations in quasi-β-normed spaces. J. Inequal. Appl. Article ID 423231: 23 pages (2010).