دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره چهاردهم، تابستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

یک روش جدید برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای با قیود تساوی

سیده‌فرخنده طیب‌نسب[۱]، فرهاد حمیدی[۲*]، مهدی الله‌دادی[۳]

(۱) دانشجوی دکتری ریاضی دانشگاه سیستان و بلوچستان، سیستان و بلوچستان،ایران.
(۲) استادیار گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، سیستان و بلوچستان، ایران (نویسنده مسئول).
(۳) استادیار گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، سیستان و بلوچستان، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۱۲/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۴/۲۰

چکیده

اکثر تحقیقات بر روی مسائل برنامه‌ریزی خطی دو ترازه (BLP) در شکل قطعی آن متمرکز شده است که ضرایب و متغیرهای تصمیم‌گیری در توابع هدف و قیود، قطعی فرض شده‌اند. در واقع بدلیل وجود اطلاعات نادقیق و مبهم، شناخت دقیق مقادیر ضرایب برای ساختن مدل دو ترازه مشکل است. نظریه مجموعه‌های بازه‌ای برای توصیف و حل عدم‌قطعیت و عدم‌دقت در این مسائل تصمیم‌گیری مناسب است. به همین دلیل مسئله برنامه‌ریزی دو ترازه بازه‌ای که در آن ضرایب در هر دو تابع هدف و محدودیت‌ها بازه‌ای می‌باشند یک موضوع جذاب می‌باشد. در این مقاله، یک نوع از مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای $(IBLP)$ را که در آن تمام ضرایب در هر دو تابع هدف و محدودیت‌ها بازه‌ای می‌باشند، در نظر می‌گیریم. هدف از این مقاله ارائه روش جدیدی برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای با قیود تساوی می‌باشد. با ارائه مثال عددی، پیاده‌سازی این روش بیان شده است.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی دو ترازه، ضرایب بازه‌ای، بهترین و بدترین مقدار بهینه.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: f_hamidi@math.usb.ac.ir

۱- مقدمه:

در مسائل بهینه‌سازی واقعی ممکن است تصمیم‌گیری به صورت متمرکز و توسط یک تصمیم‌گیرنده نباشد بلکه تعدادی تصمیم‌گیرنده موجود باشند، این نوع از مسائل را مسائل بهینه‌سازی نامتمرکز با ساختار سلسله مراتبی می‌نامند. یکی از مشهورترین مدل‌های این دسته از مسائل، برنامه‌ریزی خطی دو ترازه می‌باشد. در این مدل تصمیم‌گیرنده در تراز بالایی (پیش‌رو) و دیگری در تراز پایینی (دنباله‌رو) موجودند که هر کدام تابع هدف خودشان را دارند و حتی ممکن است متضاد باشند. مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه شبیه به مسئله‌ای است که اولین بار توسط ستکلبرگ [۱] در سال ۱۹۵۲ برای حل مسائل مدیریتی نامتمرکز با ساختار سلسله مراتبی در زمینه‌ی نظریه‌ی بازی‌ها ارائه شد. فرمول‌بندی برنامه‌ریزی دو ترازه اولین بار توسط براکن و مکگیل [۲] انجام شد. روش‌های حل مختلفی برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه ارائه شده است. مانند بهترین $k-$ام [۳]، شاخه و کران [۴]، لولای مکمل [۵]، تابع جریمه [۶]، و الگوریتم ژنتیک [۷،۸]. در مدل‌های برنامه‌ریزی دو ترازه معمولی، پارامترها به صورت دقیق تعریف می‌شوند. در دو دهه‌ی گذشته، بیشترین تحقیقات بر روی مسائل برنامه‌ریزی دو ترازه قطعی می‌باشد. برای نشان دادن نادقیقی و عدم‌اطمینان به غیر از استفاده‌ی نظریه فازی و تحلیل احتمالی، روش دیگری استفاده از ریاضیات بازه‌ای می‌باشد. نظریه‌ی بازه‌ای نظریه‌ای برای اقدام در شرایط عدم‌قطعیت می‌باشد و قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌هایی که نادقیق و مبهم هستند چنان‌چه در عالم واقعی اغلب چنین است، صورت ریاضی بخشد و زمینه را برای استدلال استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم‌قطعیت فراهم آورد. یک عدد بازه‌ای، بهترین و ساده‌ترین نمایش برای نادقیقی و عدم‌اطمینان می‌باشد. در سال‌های اخیر، مسئله برنامه‌ریزی دو ترازه بازه‌ای که در آن ضرایب در هر دو تابع هدف و محدودیت‌ها به صورت بازه‌ای بیان شده‌اند، به سرعت تبدیل به یک حوزه‌ی پژوهشی در حال پیشرفت شده است و مورد مطالعه برخی نویسندگان قرار گرفته شده است. کالویت و گیل [۹]، وقتی فقط ضرایب توابع هدف، بازه‌ای باشند الگوریتم‌هایی برای محاسبه بهترین و بدترین مقدار بهینه‌ی تابع هدف معرفی کرده‌اند. حمیدی و میش‌مست نهی [۱۰،۱۱]، الگوریتم‌هایی را برای این مسئله وقتی که همه‌ی ضرایب، بازه‌ای هستند تعمیم داده‌اند و اصلاحاتی برای بهبود آنها ارائه کرده‌اند. تاکنون پژوهش‌گری در زمینه‌ی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای با قیود تساوی کار نکرده است. بنابراین در این مقاله ما مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای با قیود تساوی را به چندین زیر مسئله برای بدست آوردن یک برد برای مقادیر بهینه تبدیل می‌کنیم. ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ شکل ریاضی مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه بازه‌ای و تعایف مورد نیاز بیان می‌شوند. در بخش ۳ روش جدید برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای با قیود تساوی را بیان نموده و سپس مثال عددی برای نشان دادن چگونگی اجرای روش فوق ارائه می‌شود. در نهایت بخش ۴، نتیجه‌گیری می‌باشد.

۲- پیش نیازها و تعاریف

فرم کلی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه به و تعاریف مربوط به آن به صورت زیر می‌باشد [۱۲]:

مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه یک مدل بهینه‌سازی تو در تو شامل دو مسئله می‌باشد، یکی مسئله تصمیم‌گیرنده تراز پیش‌رو و دیگری مسئله‌ی تصمیم‌گیرنده تراز دنباله‌رو. پیش‌رو بر بردار $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ و دنباله‌رو بر بردار $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ کنترل دارند. ابتدا پیش‌رو با انتخاب x سعی به مینیمم‌سازی $F(x, y)$، احتمالا تحت تعدادی قید اضافی دارد، دنباله‌رو با مشاهده‌ی تصمیم پیش‌رو، با انتخاب یک y تابع هدفش، $f(x, y)$، را تحت تعدادی قید برای مقدار خاص x، مینیمم‌سازی می‌کند. توجه شود که پیش‌رو بر هدف و فضای تصمیم دنباله‌رو تاثیر می‌گذارد. مسئله BLP را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\max_{x\in X} \quad F(x,y)=c^1x+d^1y \\ &\max_{y\in Y} \quad f(x,y)=c^2x+d^2y \qquad (1) \\ &s.t. \qquad Ax+By\le b \end{aligned}$$

که در آن $d^1.d^2 \in \mathbb{R}^m$، $c^1.c^2 \in \mathbb{R}^n$، $b \in \mathbb{R}^p$، $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$، $B \in \mathbb{R}^{p\times m}$

به ازای xای که پیش‌رو انتخاب می‌کند، جمله‌ی c^2x در تابع هدف دنباله‌رو مقداری ثابت می‌باشد و می‌تواند حذف شود.

تعریف ۱: تعاریف زیر را برای برنامه‌ریزی خطی دو ترازه در نظر بگیرید:

الف: ناحیه قیدی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه:

$$S=\{(x,y):\ x\in X\ ,y\in Y\ ,\ Ax+By\le b\}$$

ب: مجموعه‌ی شدنی دنباله‌رو برای مقدار مشخص شده‌ی $x\in X$:

$$S(x)=\{y\in Y:\ By\le b-Ax\ \}$$

ج: تصویر S روی فضای تصمیم پیش‌رو:

$$S(X)=\{x\in X: \exists y\in Y,\ \ Ax+By\le b\ \}$$

د: مجموعه واکنش منطقی دنباله‌رو برای $x\in S(X)$:

$$P(x)=\left\{y\in Y: y\in\ \arg\min\left\{f(x,y): y\in S(x)\right\}\right\}$$

ح: ناحیه‌ی القاپذیر:

$$IR=\{(x,y):(x,y)\in S, y\in P(x)\}.$$

در واقع IR مجموعه‌ای است که پیش‌رو روی آن بهینه‌سازی را انجام می‌دهد. پس برنامه‌ریزی خطی دو ترازه را می‌توان به شکل زیر خلاصه کرد:

$$\min\{F(x,y):(x,y)\in IR\}.$$

نکته ۱: معمولا X و Y را به صورت زیر در نظر می‌گیرند: $Y=\{y\in\mathbb{R}^m: y\ge 0\}$

$$X=\{x\in\mathbb{R}^n: x\ge 0\}$$

برای این‌که برنامه‌ریزی خطی دو ترازه خوش تعریف باشد، فرض می‌شود که:

الف: $S\neq\varnothing$ و فشرده باشد.

ب: $P(x)\neq\varnothing$ و نگاشتی نقطه به نقطه باشد.

یک عدد بازه‌ای X به صورت $[\underline{X},\overline{X}]$ نمایش داده می‌شود که $\underline{X}\le\overline{X}$. اگر $\overline{X}=\underline{X}$، آنگاه X تباهیده خواهد بود. که در این صورت عدد بازه‌ای X تبدیل به یک عدد حقیقی می‌شود [۱۳].

تعریف ۲: فرض کنید $m.n\in\mathbb{N}$،
$\underline{A}=\left(\underline{a}_{ij}\right)\in\mathbb{R}^{m\times n}$ و $\overline{A}=\left(\overline{a_{ij}}\right)\in\mathbb{R}^{m\times n}$ دو ماتریس باشند به طوری‌که برای هر i,j؛ $\underline{a}_{ij}\le\overline{a}_{ij}$ (که در این صورت می‌نویسیم $\underline{A}\le\overline{A}$). مجموعه ماتریس‌های بازه‌ای عبارت است از:

$$A^I=[\underline{A}.\overline{A}]=\{A\in\mathbb{R}^{m\times n}:\underline{A}\le A\le\overline{A}\}$$

تعریف ۳: مرکز و شعاع ماتریس بازه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_c=\frac{1}{2}(\underline{A}+\overline{A}),\Delta=\frac{1}{2}(\overline{A}-\underline{A})$$

که در این صورت

$$A^I=\left[\underline{A},\overline{A}\right]=\left[A_c-\Delta,A_c+\Delta\right]$$

حالت خاصی از ماتریس‌های بازه‌ای بردار بازه‌ای می‌باشد، یعنی:

$$b^I=[\underline{b}.\overline{b}]=\{b\in\mathbb{R}^{m\times 1}:\underline{b}\le b\le\overline{b}\}$$

و

$$b^I=\left[\underline{b},\overline{b}\right]=[b_c-\delta,b_c+\delta],$$

که در آن:

$$b_c=\frac{1}{2}\left(\underline{b}+\overline{b}\right),\ \ \delta=\frac{1}{2}\left(\overline{b}-\underline{b}\right)$$

تعریف ٤: فرض کنید e_j ستون j ام ماتریس واحد و $e=(1,1,\ldots,1)^T$ برداری شامل مولفه‌های یک و Y_m مجموعه‌ای از تمام بردارهای ± 1 در $\mathbb{R}^m$ باشد یعنی

$$Y_m=\{y\in\mathbb{R}^m|\,|y|\ =e\}$$

که در آن $|y|$ برداری است که درآیه‌های آن قدر مطلق درآیه‌های بردار y می‌باشد. برای هر $x\in\mathbb{R}^m$ تعریف می‌کنیم:

$$(\operatorname{sgn} x)_i=\begin{cases}1 & , \quad x_i\ge 0\\ -1 & , \quad x_i<0\end{cases}$$

به طوری‌که $\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{m}$. بنابراین $\operatorname{sgn} x\in Y_m$.
برای بردار $y\in\mathbb{R}^m$ تعریف می‌کنیم:
$T_y=diag\left(y_1,\ldots,y_m\right)$ در این صورت:
$T_{-y}=-T_y, T_y^{-1}=T_y, \left|T_y\right|=I$ و برای هر
$x\in\mathbb{R}^m$، با تعریف $z=\operatorname{sgn} x$ داریم: $\left|z\right|=T_z x$
. بنابراین داریم: $T_z x=\left(z_i x_i\right)_{i=1}^m$.
با توجه به ماتریس بازه‌ای $A^I=\left[A_c-\Delta, A_c+\Delta\right]$،
برای هر $y,z\in Y_m$ ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{yz}}=\mathrm{A}_{\mathrm{c}}-\mathrm{T}_{\mathrm{y}}\mathrm{A}_{\Delta}\mathrm{T}_{\mathrm{z}},$$
$$\mathrm{A}_{\mathrm{ye}}=\mathrm{A}_{\mathrm{c}}-\mathrm{T}_{\mathrm{y}}\mathrm{A}_{\Delta}\mathrm{T}_{\mathrm{e}}=\mathrm{A}_{\mathrm{c}}-\mathrm{T}_{\mathrm{y}}\mathrm{A}_{\Delta}.$$

به طور مشابه برای بردار بازه‌ای $b^I=\left[b_c-\delta, b_c+\delta\right]$، برای هر $y\in\mathbb{R}^m$ بردارهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{b}_{\mathrm{y}}=\mathrm{b}_{\mathrm{c}}+\mathrm{T}_{\mathrm{y}}\delta.$$

تعریف ۵: بردار $x\in\mathbb{R}^n$جواب ضعیف $\mathrm{A}^{\mathrm{I}}\mathrm{x}=\mathrm{b}^{\mathrm{I}}$ است اگر وجود داشته باشد $\mathrm{A}\in\mathrm{A}^{\mathrm{I}}$ و $\mathrm{b}\in\mathrm{b}^{\mathrm{I}}$ به طوری‌که $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$.

تعریف ٦: دستگاه معادلات بازه‌ای $\mathrm{A}^{\mathrm{I}}\mathrm{x}=\mathrm{b}^{\mathrm{I}}$ را شدنی ضعیف گویند اگر و تنها اگر دارای یک جواب ضعیف نامنفی باشد.

قضیه۱. دستگاه معادلات خطی بازه‌ای $\mathrm{A}^{\mathrm{I}}\mathrm{x}=\mathrm{b}^{\mathrm{I}}$ شدنی ضعیف است اگر و تنها اگر دستگاه $\overline{\mathrm{A}}\mathrm{x}\geq\underline{\mathrm{b}}$ ، $\underline{\mathrm{A}}\mathrm{x}\leq\overline{\mathrm{b}}$ شدنی باشد.
اثبات به[۱۴] مراجعه کنید.

تعریف ۷: دستگاه معادلات خطی بازه‌ای $\mathrm{A}^{\mathrm{I}}\mathrm{x}=\mathrm{b}^{\mathrm{I}}$ شدنی قوی است اگر هر دستگاه $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$ که $\mathrm{A}\in\mathrm{A}^{\mathrm{I}}$ و $\mathrm{b}\in\mathrm{b}^{\mathrm{I}}$ شدنی باشد.

تعریف ۸: دستگاه معادلات خطی بازه‌ای $\mathrm{A}^{\mathrm{I}}\mathrm{x}=\mathrm{b}^{\mathrm{I}}$ را حل‌پذیر گویند اگر جواب داشته باشد و شدنی گویند اگر جواب نامنفی داشته باشد.

۳- روش جدید حل برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای با قیود تساوی

فرض کنید $\left[\underline{A},\overline{A}\right]=A^I$ یک ماتریس بازه‌ای $m\times n_1$ و $\left[\underline{B},\overline{B}\right]=B^I$ ماتریس بازه‌ای $m\times n_2$ و $\left[\underline{b},\overline{b}\right]=b^I$ ماتریس ستونی $m\times 1$. و $\mathrm{c}\in\left[\underline{\mathrm{c}},\overline{\mathrm{c}}\right]=\mathrm{c}^{\mathrm{I}}$، $d\in\left[\underline{\ },\overline{\ }\right]=d^I$، $e\in\left[\underline{e},\overline{e}\right]=e^I$ به ترتیب بردارهای بازه‌ای n_1,m,n_1 بعدی می‌باشند به طوری‌که $n_1+n_1=n$
مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه زیررا در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\min_{x\geq 0}\quad c\,x+d\,y\\&\min_{y\geq 0}\quad e\,y\qquad\qquad(2)\\&s.t.\qquad A\,x+B\,y=b\end{aligned}$$

که در آن $\mathrm{c}\in\mathrm{c}^{\mathrm{I}}$، $d\in d^I$، $e\in e^I$ ، $A\in A^I$، $B\in B^I$ و $b\in b^I$ می‌باشند و $x\in\mathbb{R}^{n_1}$، $y\in\mathbb{R}^{n_2}$ به طوری‌که $n_1+n_2=n$.
فرض می‌کنیم که مدل (۲) برای هر مجموعه ضرایب انتخابی، جواب داشته باشد.

نکته۲: در مدل (۲) چون تمام قیود به صورت تساوی می‌باشند، و از طرفی طبق نکته ۱ ناحیه قیدی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه ناتهی و فشرده می‌باشد و مجموعه واکنش منطقی دنباله‌رو نگاشتی نقطه به نقطه می‌باشد، لذا به وضوح ناحیه القایی با ناحیه قیدی برابر می‌باشد.
پس طبق نکته ۲ و تعریف ۱، برنامه‌ریزی خطی دو ترازه (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\min\left\{c\,x+d\,y: A\,x+B\,y=b;\ x,y\geq 0\right\}\quad(3)$$

برای سادگی نوشتن مدل (۳) قرار می‌دهیم:

$$\left[A\ \ B\right]=A',\ \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=X',\ \left(c,d\right)=C'.$$

بنابراین مدل (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\min\left\{C'^{T}X' : A'X'=b;\ X'\geq 0\right\}\qquad(4)$$

که در آن $C' \in C'^I$، $A' \in A'^I$ و $b \in b^I$ می‌باشند و $X' \in \mathbb{R}^n$.

مقدار بهینه‌ی مدل (۲) را با $IBLP\left(A', b, C', e\right)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین برد مقادیر بهینه‌ی مدل (۲) را می‌توان به صورت $\left[\underline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right), \overline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right)\right]$ نوشت به طوری‌که:

$$\underline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right) = \inf\{IBLP\left(A', b, C', e\right) \mid A' \in A'^I, b \in b^I, C' \in C'^I, e \in e^I\},$$

$$\overline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right) = \sup\{IBLP\left(A', b, C', e\right) \mid A' \in A'^I, b \in b^I, C' \in C'^I, e \in e^I\}.$$

در واقع برای تعیین کران‌های فوق با رویکردی جدید مشابه آنچه برای برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای با قیود تساوی ارائه شده (۱۴)، برای دو ترازه استفاده می‌کنیم.

حال برای محاسبه‌ی کران‌های $\underline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right)$ و $\overline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right)$ قضیه‌ی ۲ را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲. داریم:

الف:

$$\underline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right) = \inf\{IBLP\left(A'^I, b^I, \underline{C}', \underline{e}\right) \mid \underline{A}' X' \le \overline{b},\ \overline{A}' X' \ge \underline{b},\ X' \ge 0\}$$

ب:

$$\overline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right) = \sup_{y \in Y_m} IBLP\left(A'_{ye}, b_y, \overline{C}', \bar{e}\right)$$

اثبات.

اثبات الف. قرار می‌دهیم:

$$\underline{\phi} = \inf\{IBLP\left(A'^I, b^I, \underline{C}', \underline{e}\right) \mid \underline{A}' X' \le \overline{b},\ \overline{A}' X' \ge \underline{b},\ X' \ge 0\} \quad (5)$$

ثابت می‌کنیم که $\underline{\phi} = \underline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right)$. برای این منظور نشان می‌دهیم: $\underline{\phi} \ge \underline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right)$ و $\underline{\phi} \le \underline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right)$.

ابتدا ثابت می‌کنیم $\underline{\phi} \ge \underline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right)$. اگر $\underline{\phi} = \infty$ واضح است که $\underline{\phi} \ge \underline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right)$.

حال اگر $\underline{\phi} < \infty$ آنگاه (۵) دارای جواب شدنی است. فرض کنید X' جواب نامنفی $\underline{A}' X' \le \overline{b}$ و $\overline{A}' X' \ge \underline{b}$ باشد. بنابر تعریف ۵ و ۶ و همچنین قضیه ۱، X' جواب ضعیف نامنفی $A'^I X' = b^I$ می‌باشد. در نتیجه وجود دارد $A' \in A'^I$ و $b \in b^{I'}$ به طوری‌که $A' X' = b$. بنابراین داریم:

$$\underline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right) = \inf\{IBLP\left(A', b, C', e\right) \mid A' \in A'^I, b \in b^I, C' \in C'^I, e \in e^I\} \quad (6)$$
$$\le IBLP\left(A', b, \underline{C}', \underline{e}\right) \le IBLP\left(A'^I, b^I, \underline{C}', \underline{e}\right).$$

با گرفتن $\inf$ از طرفین (سمت راست) رابطه (۶) داریم:

$$\underline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right) \le \underline{\phi}$$

حال نشان می‌دهیم $\underline{IBLP}\left(A'^I, b^I, C'^I, e^I\right) \ge \underline{\phi}$.

کافی است نشان دهیم برای هر $A' \in A'^I, b \in b^I, C' \in C'^I$ داریم:

$$\underline{\phi} \le BLP\left(A', b, C'\right).$$

اگر $BLP\left(A', b, C'\right) = \infty$ واضح است که $\underline{\phi} \le BLP\left(A', b, C'\right)$.

اگر $IBLP\left(A', b, C', e\right) < \infty$ آنگاه مسئله (۲) شدنی است. فرض کنید X' جواب شدنی (۲) باشد لذا $A'^I X' = b^I$ جواب شدنی ضعیف دارد بنا به قضیه ۱،

$X^{/}$ جواب نامنفی دستگاه $\underline{A}^{/}X^{/}\le\overline{b},\overline{A}^{/}X^{/}\ge\underline{b}$ است و داریم:

$$\underline{\phi}\le IBLP\left(A^{/I},b^{I},\underline{C}^{/},\underline{e}\right)\le IBLP\left(A^{/I},b^{I},C^{/I},e^{I}\right)$$

لذا $\underline{\phi}\le IBLP\left(A^{/},b,C^{/},e\right)$.

پس $\underline{IBLP}\left(A^{/I},b^{I},C^{/I},e^{I}\right)\ge\underline{\phi}$. در نتیجه $\underline{IBLP}\left(A^{/I},b^{I},C^{/I},e^{I}\right)=\underline{\phi}$.

اثبات قسمت ب. قرار می‌دهیم:

$$\overline{\phi}=\sup_{y\in Y_m}IBLP\left(A^{/}_{ye},b_y,\overline{C}^{/},\overline{e}\right).$$

ابتدا نشان می‌دهیم $\overline{\phi}\le\overline{IBLP}\left(A^{/I},b^{I},C^{/I},e^{I}\right)$. چون $A^{/}_{ye}\in A^{/I},b_y\in b^{I}$ برای هر $y\in Y_m$ و $C^{/}\in C^{/I}$ و $e\in e^{I}$. بنابراین:

$$\begin{aligned}&\overline{\phi}\\&\le\sup\{IBLP\left(A^{/},b,C^{/},e\right)\\&\mid\ A^{/}\in A^{/I},b\in b^{I},C^{/}\in C^{/I},e\in e^{I}\}\\&=\overline{IBLP}\left(A^{/I},b^{I},C^{/I},e^{I}\right).\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم $\overline{IBLP}\left(A^{/I},b^{I},C^{/I},e^{I}\right)\le\overline{\phi}$. کافی است ثابت کنیم برای هر $A^{/}\in A^{/I},b\in b^{I},C^{/}\in C^{/I},e\in e^{I}$ داریم:

$$IBLP\left(A^{/},b,C^{/},e\right)\le\overline{\phi}$$

اگر $IBLP\left(A^{/},b,C^{/},e\right)=-\infty$ واضح است که $IBLP\left(A^{/},b,C^{/},e\right)\le\overline{\phi}$.

اگر $IBLP\left(A^{/},b,C^{/},e\right)=+\infty$ آنگاه مسئله (۴) نشدنی است. لذا دستگاه $A^{/I}X^{/}=b^{I}$ بنا به تعریف ۷، شدنی قوی نیست. پس $A^{/}_{ye}X^{/}=b_y$ نیز برای بعضی $y\in Y_m$ شدنی نیست. بنابراین $IBLP\left(A^{/}_{ye},b_y,\overline{C}^{/},\overline{e}\right)=\infty$ لذا داریم $\overline{\phi}=\infty$ و $IBLP\left(A^{/},b,C^{/},e\right)=\overline{\phi}$.

اگر $IBLP\left(A^{/},b,C^{/},e\right)$ متناهی باشد دوگان (۴) در نظر می‌گیریم:

$$\max\left\{b^{T}\rho\ \middle|\ A^{/T}\rho\le C^{/}\right\}\qquad(7)$$

اگر ρ^{*} جواب بهینه‌ی مساله (۷) باشد آنگاه داریم: $IBLP\left(A^{/},b,C^{/},e\right)=b^{T}\rho^{*}$.

تعریف می‌کنیم $y=\operatorname{sgn}\rho^{*}$ در این صورت $y\in Y_m$ و $\left|\rho^{*}\right|=T_y\rho^{*}$.

مساله زیر ا در نظر بگیرید:

$$\min\left\{\overline{C}^{/T}X^{/}\ \middle|\ A^{/}_{ye}X^{/}=b_y,X^{/}\ge0\right\}\qquad(8)$$

دوگان آن عبارت است از:

$$\max\left\{b_y^{\ T}\rho\ \middle|\ A^{/T}_{ye}\rho\le\overline{C}^{/}\right\}\qquad(9)$$

مسئله (۹) حل‌پذیر است، چون ρ^{*}، $A^{/}_{ye}{}^{T}\rho\le\overline{C}^{/}$ را حل می‌کند زیرا $\left|\left(A^{/}-A^{/}_{c}\right)^{T}\rho^{*}\right|\le\Delta^{T}\left|\rho^{*}\right|$، داریم:

$$\begin{aligned}A^{/T}_{ye}\rho^{*}&=\left(A_c-T_y\Delta\right)^{T}\rho^{*}\\&=\left(A^{/T}_{c}-\Delta^{T}T_y\right)\rho^{*}\\&=A^{/T}_{c}\rho^{*}-\Delta^{T}\left|\rho^{*}\right|\le\left(A^{/}_{c}+A^{/}-A^{/}_{c}\right)^{T}\rho^{*}\\&=A^{/T}\rho^{*}\le C^{/}\le\overline{C}^{/}\end{aligned}$$

اگر (۸) نشدنی باشد آنگاه $IBLP\left(A^{/}_{ye},b_y,\overline{C}^{/},\overline{e}\right)=\infty$ و لذا $\overline{\phi}=\infty$ و $IBLP\left(A^{/},b,C^{/},e\right)\le\overline{\phi}$.

اگر (۸) شدنی باشد آنگاه چون $IBLP\left(A^{/},b,C^{/},e\right)<\infty$ و

$$\sup\left\{b^{T}\rho\ \middle|\ A^{/T}\rho\le C^{/}\right\}=G\left(A^{/},b,C^{/}\right)>-\infty$$

و با توجه به قضیه دوگان، مسئله (۹) دارای جواب بهینه‌ی $\hat{\rho}$ است که در این صورت $IBLP\left(A^{/}_{ye},b_y,\overline{C}^{/},\overline{e}\right)=b_y^{T}\hat{\rho}$. بنابراین:

$$IBLP\left(A^{/},b,C^{/},e\right)=b^{T}\rho^{*}$$
$$=\left(b_c+b-b_c\right)^{T}\rho^{*}\le b_c^{T}\rho^{*}$$
$$+\delta^{T}\left|\rho^{*}\right|=\left(b_c^{T}+\delta^{T}T_y\right)\rho^{*}$$
$$=\left(b_c+T_y\delta\right)^{T}\rho^{*}=b_c^{T}\rho^{*}$$
$$\le b_c^{T}\hat{\rho}=IBLP\left(A^{/}_{ye},b_y,\bar{C}^{/},\bar{e}\right)\le\bar{\phi}$$

لذا $\overline{IBLP}\left(A^{/I},b^{I},C^{/I},e^{I}\right)\le\bar{\phi}$ و در نتیجه با توجه به نامساوی $\bar{\phi}\le\overline{IBLP}\left(A^{/I},b^{I},C^{/I},e^{I}\right)$ داریم:

$$\bar{\phi}=\overline{IBLP}\left(A^{/I},b^{I},C^{/I},e^{I}\right)$$

بنابراین در مثال ۱ مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای با قیود تساوی را با استفاده از قضیه (۲) به چندین زیر مسئله برای بدست آوردن برد مقادیر بهینه تبدیل می‌کنیم.

مثال ۱: مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه زیر را با توجه به قضیه ۲ حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&\min_{x\ge 0} && F(x,y)=[1,2]x+[3,5]y\\
&\min_{y\ge 0} && f(x,y)=[1,2]y\\
&s.t. && [\tfrac{5}{8},\tfrac{4}{5}]x+y=[4,5] \qquad (10)\\
& && [\tfrac{6}{5},\tfrac{5}{2}]x+y=[5,6]
\end{aligned}$$

حل: ماتریس‌ها و بردارهای بازه‌ای مربوط به مدل (۱۰) به صورت زیر می‌باشند:

$$A^{/}=\begin{bmatrix}\left[\frac{5}{8},\frac{4}{5}\right] & 1\\ \left[\frac{6}{5},\frac{5}{2}\right] & 1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}[4,5]\\ [5,6]\end{bmatrix} \qquad (11)$$
$$,C^{/}=\left[[1,2],[3,5]\right],X^{/}=[x,y]$$

طبق قسمت الف قضیه ۲، و روابط (۱۱) کران پایین برای برد مقادیر بهینه یعنی،

$$\underline{IBLP}\left(A^{/I},b^{I},C^{/I},e^{I}\right)=$$
$$\inf\{IBLP\left(A^{/I},b^{I},\underline{C}^{/},\underline{e}\right)$$
$$\left|\ \underline{A}^{/}X^{/}\le\bar{b},\ \bar{A}^{/}X^{/}\ge\underline{b},X^{/}\ge 0\right\}$$

به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min_{x\ge 0} && F(x,y)=x+3y\\
&\min_{y\ge 0} && f(x,y)=y\\
&s.t. && \tfrac{5}{8}x+y\le 5\\
& && \tfrac{4}{5}x+y\ge 4 \qquad (12)\\
& && \tfrac{6}{5}x+y\le 6\\
& && \tfrac{5}{2}x+y\ge 5
\end{aligned}$$

که با استفاده از روش بهترین k−ام [۱۵]، برای مدل (۱۵) مقدار بهینه‌ی $\underline{IBLP}^{*}=5$ بدست می‌آید.
حال طبق قسمت ب قضیه ۲ کران بالای برد مقادیر بهینه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\overline{IBLP}\left(A^{/I},b^{I},C^{/I},e^{I}\right)=\sup_{y\in Y_m}IBLP\left(A^{/}_{ye},b_y,\bar{C}^{/},\bar{e}\right)$$

حال طبق روابط (۱۱) و تعریف ۴، $A^{/}_{ye}=b$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A^{/}_{ye}=$$
$$\left(\begin{bmatrix}\frac{57}{80} & 1\\ \frac{37}{20} & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}y_1 & 0\\ 0 & y_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{7}{80} & 0\\ \frac{13}{20} & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{9}{2}\\ \frac{11}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1 & 0\\ 0 & y_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad (13)$$
$$=b_y$$

بنا به قسمت ب قضیه ۲ و مدل (۱۳) زیر مدل‌های زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
&\min_{y\ge 0} && F(x,y)=2x+5y\\
&\min_{y\ge 0} && f(x,y)=2y\\
&s.t. && \tfrac{5}{8}x+y=5 \qquad (14)\\
& && \tfrac{6}{5}x+y=6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min_{y\geq 0} \quad F(x,y)=2x+5y \\ &\min_{y\geq 0} \quad f(x,y)=2y \\ &s.t. \quad \frac{4}{5}x+y=4 \qquad (15) \\ &\qquad \frac{5}{2}x+y=5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min_{x\geq 0} \quad F(x,y)=2x+5y \\ &\min_{y\geq 0} \quad f(x,y)=2y \\ &s.t. \quad \frac{5}{8}x+y=5 \qquad (16) \\ &\qquad \frac{5}{2}x+y=5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min_{x\geq 0} \quad F(x,y)=2x+5y \\ &\min_{y\geq 0} \quad f(x,y)=y \\ &s.t. \quad \frac{4}{5}x+y=4 \qquad (17) \\ &\qquad \frac{6}{5}x+y=6 \end{aligned}$$

با استفاده از روش بهترین $k-$ام مدل‌های (۱۴)، (۱۵)، (۱۶)، (۱۷) به ترتیب دارای مقادیر بهینه‌ی $\overline{IBLP}^*_{14}=\frac{530}{23}$، $\overline{IBLP}^*_{15}=\frac{320}{17}$، $\overline{IBLP}^*_{16}=25$، $\overline{IBLP}^*_{17}=10$. بنابراین طبق قسمت ب قضیه ۲ داریم:

$$\begin{aligned} &\overline{IBLP}\left(A'^{I},b^{I},C'^{I},e^{I}\right) \\ &=\sup\left\{\frac{530}{23},\frac{320}{17},25,10\right\}=25 \end{aligned}$$

پس برد مقادیر بهینه به صورت (۵،۲۵) می‌باشد.

۴- نتیجه‌گیری:

در این مقاله برای تعیین کران‌های تابع هدف برنامه‌ریزی خطی دو ترازه با ضرایب بازه‌ای با قیود تساوی با رویکردی مشابه آنچه برای برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای ارائه شده، استفاده نموده و روشی جدید را ارائه نمودیم. در واقع تاکنون پژوهش‌گری در زمینه‌ی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای با قیود تساوی کار نکرده است. به طور کلی تعیین بدترین مقدار تابع هدف وقتی مدل دارای حداقل یک قید تساوی بازه‌ای باشد، به عنوان یک مسئله NP – Hard شناخته می‌شود. در نهایت، مثال عددی برای نشان دادن قابلیت پیاده‌سازی روش مورد نظر ارائه گردید.

فهرست منابع

[1] H Von Stackelberg (1952). The theory of the market economy, Oxford University Press, New York, Oxford.

[2] J. Bracken and J. McGill (1973). Mathematical programs with optimization problems in the constraints, Operations Research.

[3] W. Bialas and M. Karwan (1984). Two level linear programming, Management Science.

[4] J. Bard and J. Moore (1990). A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem, SIAM J. Sci. Stat. Comput.

[5] J. Judice and A. Faustino (1992). A sequential LCP method for bilevel linear programming, Annals of Operations Research.

[6] Y.Lv, T.Hu, G. Wang and Z. Wan (2007). A penalty function method based on Kuhn-Tucker condition for solving linear bilevel programming, Applied mathematics and computation.

[7] H.I. Calvete and C. Galé, and P.M Mateo (2008). A new approach for solving Linear bilevel programs using genetic algorithms, European Journal of Operational Research.

[8] R.J, Kuo and Y.S, Han (2011). A hybrid of genetic algorithm and particle swarm optimization for solving bi-level linear programming problem – A case study of supply chain model, Applied Mathematical Modelling.

[9] H.I, Calvete and C. Galé(2012). Linear bilevel programming with interval coefficients, Journal of Computational and Applied Mathematics.

[10] F. Hamidi and H. Mishmast Nehi (2013). Bilevel Linear Programming with Fuzzy Parameters, Iranian Journal of Fuzzy Systems.

[11] H. Mishmast Nehi and F. Hamidi (2013). Upper and lower bounds for the optimal values of the interval bilevel linear programming problem, Applied Mathematical Modelling.

[12] J Bard (1988). Practical bilevel optimization: algorithms and applications, Kluver Academic Publishers, The Netherlands.

[13] G. Alefeld, J. Herzberger (1983). Introduction to interval computations, academic press, INC.

[14] M. Eledler, L. Nedoma, L. Ramik, L.Rohn, K. Zimmermann (2007). Linear optimization problems with inexact data, Springer.

[15] W. Bialas and M. Karwan (1984). Two level linear propramming, Management Science.