

یک روش جدید برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای با قيود تساوی

سیده‌فرخنده طیب‌نسب^۱، فرهاد حمیدی^{۲*}، مهدی الله‌دادی^۳

^(۱) دانشجوی دکتری ریاضی دانشگاه سیستان و بلوچستان، سیستان و بلوچستان، ایران.

^(۲) استادیار گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، سیستان و بلوچستان، ایران (نویسنده مسئول).

^(۳) استادیار گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، سیستان و بلوچستان، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۱۲/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۴/۲۰

چکیده

اکثر تحقیقات بر روی مسائل برنامه‌ریزی خطی دو ترازه (BLP) در شکل قطعی آن متمرکز شده است که ضرایب و متغیرهای تصمیم‌گیری در توابع هدف و قيود، قطعی فرض شده‌اند. در واقع بدلیل وجود اطلاعات نادقیق و مبهم، شناخت دقیق مقادیر ضرایب برای ساختن مدل دو ترازه مشکل است. نظریه مجموعه‌های بازه‌ای برای توصیف و حل عدم قطعیت و عدم دقت در این مسائل تصمیم‌گیری مناسب است. به همین دلیل مسئله برنامه‌ریزی دو ترازه بازه‌ای که در آن ضرایب در هر دو تابع هدف و محدودیت‌ها بازه‌ای می‌باشند یک موضوع جذاب می‌باشد. در این مقاله، یک نوع از مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای ($IBLP$) را که در آن تمام ضرایب در هر دو تابع هدف و محدودیت‌ها بازه‌ای می‌باشند، در نظر می‌گیریم. هدف از این مقاله ارائه روش جدیدی برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای با قيود تساوی می‌باشد. با ارائه مثال عددی، پیاده‌سازی این روش بیان شده است.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی دو ترازه، ضرایب بازه‌ای، بهترین و بدترین مقدار بهینه.

۱- مقدمه:

میش‌مست نهی (۱۰، ۱۱)، الگوریتم‌هایی را برای این مسئله وقتی که همه‌ی ضرایب، بازه‌ای هستند تعمیم داده‌اند و اصلاحاتی برای بهبود آنها ارائه کرده‌اند. تاکنون پژوهش‌گری در زمینه‌ی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای با قیود تساوی کار نکرده است. بنابراین در این مقاله ما مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای با قیود تساوی را به چندین زیر مسئله برای بدست آوردن یک برد برای مقادیر بهینه تبدیل می‌کنیم. ساختار مقاله به این صورت است که در بخش (۲) شکل ریاضی مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه بازه‌ای و تعایف مورد نیاز بیان می‌شوند. در بخش (۳) روش جدید برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای با قیود تساوی را بیان نموده و سپس مثال عددی برای نشان دادن چگونگی اجرای روش فوق ارائه می‌شود. در نهایت بخش (۴)، نتیجه‌گیری می‌باشد.

۲- پیش نیازها و تعاریف

فرم کلی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه به و تعاریف مربوط به آن به صورت زیر می‌باشد (۱۲):
مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه یک مدل بهینه‌سازی تو در تو شامل دو مسئله می‌باشد، یکی مسئله تصمیم‌گیرنده تراز پیش‌رو و دیگری مسئله تصمیم‌گیرنده تراز دنباله‌رو. پیش‌رو بر بردار $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ و دنباله‌رو بر بردار $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ کنترل دارند. ابتدا پیش‌رو با انتخاب x سعی به مینیمم‌سازی $F(x, y)$ ، احتمالاً تحت تعدادی قید اضافی دارد، دنباله‌رو با مشاهده‌ی تصمیم پیش‌رو، با انتخاب یک y تابع هدفش، $f(x, y)$ ، را تحت تعدادی قید برای مقدار خاص x ، مینیمم‌سازی می‌کند. توجه شود که پیش‌رو بر هدف و فضای تصمیم دنباله‌رو تاثیر می‌گذارد. مسئله BLP را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \max_{x \in X} \quad & F(x, y) = c^1 x + d^1 y \\ \max_{y \in Y} \quad & f(x, y) = c^2 x + d^2 y \quad (1) \\ \text{s.t.} \quad & Ax + By \leq b \end{aligned}$$

که در آن $b \in \mathbb{R}^p$ ، $c^1, c^2 \in \mathbb{R}^n$ ، $d^1, d^2 \in \mathbb{R}^m$ ، $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$

در مسائل بهینه‌سازی واقعی ممکن است تصمیم‌گیری به صورت متمرکز و توسط یک تصمیم‌گیرنده نباشد بلکه تعدادی تصمیم‌گیرنده موجود باشند، این نوع از مسائل را مسائل بهینه‌سازی نامتمرکز با ساختار سلسله مراتبی می‌نامند. یکی از مشهورترین مدل‌های این دسته از مسائل، برنامه‌ریزی خطی دو ترازه می‌باشد. در این مدل تصمیم‌گیرنده در تراز بالایی (پیش‌رو) و دیگری در تراز پایینی (دنباله‌رو) موجودند که هر کدام تابع هدف خودشان را دارند و حتی ممکن است متضاد باشند. مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه شبیه به مسئله‌ای است که اولین بار توسط ستکلبرگ (۱) در سال ۱۹۵۲ برای حل مسائل مدیریتی نامتمرکز با ساختار سلسله مراتبی در زمینه‌ی نظریه‌ی بازی‌ها ارائه شد. فرمول‌بندی برنامه‌ریزی دو ترازه اولین بار توسط براکن و مکگیل (۲) انجام شد. روش‌های حل مختلفی برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه ارائه شده است. مانند بهترین k -ام (۳)، شاخه و کران (۴)، لولای مکم (۵)، تابع جریمه (۶)، و الگوریتم ژنتیک (۷، ۸). در مدل‌های برنامه‌ریزی دو ترازه معمولی، پارامترها به صورت دقیق تعریف می‌شوند. در دو دهه‌ی گذشته، بیشترین تحقیقات بر روی مسائل برنامه‌ریزی دو ترازه قطعی می‌باشد. برای نشان دادن نادقیقی و عدم اطمینان به غیر از استفاده‌ی نظریه فازی و تحلیل احتمالی، روش دیگری استفاده از ریاضیات بازه‌ای می‌باشد. نظریه‌ی بازه‌ای نظریه‌ای برای اقدام در شرایط عدم قطعیت می‌باشد و قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌هایی که نادقیق و مبهم هستند چنانچه در عالم واقعی اغلب چنین است، صورت ریاضی بخشد و زمینه را برای استدلال استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت فراهم آورد. یک عدد بازه‌ای، بهترین و ساده‌ترین نمایش برای نادقیقی و عدم اطمینان می‌باشد. در سال‌های اخیر، مسئله برنامه‌ریزی دو ترازه بازه‌ای که در آن ضرایب در هر دو تابع هدف و محدودیت‌ها به صورت بازه‌ای بیان شده‌اند، به سرعت تبدیل به یک حوزه‌ی پژوهشی در حال پیشرفت شده است و مورد مطالعه برخی نویسندگان قرار گرفته شده است. کالویت و گیل (۹)، وقتی فقط ضرایب توابع هدف، بازه‌ای باشند الگوریتم‌هایی برای محاسبه بهترین و بدترین مقدار بهینه‌ی تابع هدف معرفی کرده‌اند. حمیدی و

تعریف ۲: فرض کنید $m, n \in \mathbb{N}$

$\underline{A} = (\underline{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $\bar{A} = (\bar{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$
و دو ماتریس باشند به طوری که برای هر i, j
 $\underline{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$ (که در این صورت می‌نویسیم $\underline{A} \leq \bar{A}$)
مجموعه ماتریس‌های بازه‌ای عبارت است از:
 $A^I = [\underline{A}, \bar{A}] = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \underline{A} \leq A \leq \bar{A}\}$

تعریف ۳: مرکز و شعاع ماتریس بازه‌ای به صورت زیر
تعریف می‌شود:

$$A_c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \bar{A}), \Delta = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$$

که در این صورت

$A^I = [\underline{A}, \bar{A}] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$
حالت خاصی از ماتریس‌های بازه‌ای بردار بازه‌ای می‌باشد،
یعنی:

$$b^I = [\underline{b}, \bar{b}] = \{b \in \mathbb{R}^{m \times 1} : \underline{b} \leq b \leq \bar{b}\}$$

و

$$b^I = [\underline{b}, \bar{b}] = [b_c - \delta, b_c + \delta],$$

که در آن:

$$b_c = \frac{1}{2}(\underline{b} + \bar{b}), \delta = \frac{1}{2}(\bar{b} - \underline{b})$$

تعریف ۴: فرض کنید e_j ستون j ام ماتریس واحد و

$Y_m = (1, 1, \dots, 1)^T$ برداری شامل مولفه‌های یک و \mathbb{R}^m باشد یعنی
 $Y_m = \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y| = e\}$

که در آن $|y|$ برداری است که درآیه‌های آن قدر مطلق
درآیه‌های بردار y می‌باشد. برای هر $x \in \mathbb{R}^m$
تعریف می‌کنیم:

$$(\text{sgn } x)_i = \begin{cases} 1 & , x_i \geq 0 \\ -1 & , x_i < 0 \end{cases}$$

به طوری که $i = 1, \dots, m$. بنابراین $\text{sgn } x \in Y_m$

برای بردار $y \in \mathbb{R}^m$ تعریف می‌کنیم:

در این صورت: $T_y = \text{diag}(y_1, \dots, y_m)$

$$T_{-y} = -T_y, T_y^{-1} = T_y, |T_y| = I$$

به ازای x ای که پیش‌رو انتخاب می‌کند، جمله‌ی $c^T x$
در تابع هدف دنباله‌رو مقداری ثابت می‌باشد و می‌تواند
حذف شود.

تعریف ۱: تعاریف زیر را برای برنامه‌ریزی خطی دو
ترازه در نظر بگیرید:

الف: ناحیه قیدی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه:

$$S = \{(x, y) : x \in X, y \in Y, Ax + By \leq b\}$$

ب: مجموعه‌ی شدنی دنباله‌رو برای مقدار مشخص
شده‌ی $x \in X$

$$S(x) = \{y \in Y : By \leq b - Ax\}$$

ج: تصویر S روی فضای تصمیم پیش‌رو:

$$S(X) = \{x \in X : \exists y \in Y, Ax + By \leq b\}$$

د: مجموعه واکنش منطقی دنباله‌رو برای $x \in S(X)$

$$P(x) = \{y \in Y : y \in \arg \min \{f(x, y) : y \in S(x)\}\}$$

ح: ناحیه‌ی القاپذیر:

$$IR = \{(x, y) : (x, y) \in S, y \in P(x)\}.$$

در واقع IR مجموعه‌ای است که پیش‌رو روی آن
بهینه‌سازی را انجام می‌دهد. پس برنامه‌ریزی خطی دو
ترازه را می‌توان به شکل زیر خلاصه کرد:

$$\min \{F(x, y) : (x, y) \in IR\}.$$

نکته ۱: معمولا X و Y را به صورت زیر در نظر

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^m : y \geq 0\}$$

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$$

برای این‌که برنامه‌ریزی خطی دو ترازه خوش‌تعریف
باشد، فرض می‌شود که:

الف: $S \neq \emptyset$ و فشرده باشد.

ب: $P(x) \neq \emptyset$ و نگاهشتی نقطه به نقطه باشد.

یک عدد بازه‌ای X به صورت $[X, \bar{X}]$ نمایش داده
می‌شود که $\underline{X} \leq \bar{X}$. اگر $\bar{X} = \underline{X}$ ، آنگاه X تباهیده
خواهد بود. که در این صورت عدد بازه‌ای X تبدیل به
یک عدد حقیقی می‌شود (۱۳).

فرض کنید $[A, \bar{A}] = A^I$ یک ماتریس بازه‌ای $m \times n_1$ و $[B, \bar{B}] = B^I$ ماتریس بازه‌ای $m \times n_2$ و $[b, \bar{b}] = b^I$ ماتریس ستونی $m \times 1$ و $d \in [\underline{d}, \bar{d}] = d^I$ ، $c \in [\underline{c}, \bar{c}] = c^I$ ، n_1, m, n_1 به ترتیب بردارهای بازه‌ای $n_1 + n_1 = n$ بعدی می‌باشند به طوری که

مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min_{x \geq 0} \quad & cx + dy \\ \min_{y \geq 0} \quad & ey \end{aligned} \quad (2)$$

s.t. $Ax + By = b$

که در آن $A \in A^I$ ، $e \in e^I$ ، $d \in d^I$ ، $c \in c^I$ ، $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ و $B \in B^I$ و $b \in b^I$ می‌باشند و $n_1 + n_2 = n$ به طوری که $y \in \mathbb{R}^{n_2}$

فرض می‌کنیم که مدل (۲) برای هر مجموعه ضرایب انتخابی، جواب داشته باشد.

نکته ۲: در مدل (۲) چون تمام قیود به صورت تساوی می‌باشند، و از طرفی طبق نکته (۱) ناحیه قیدی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه ناتهی و فشرده می‌باشد و مجموعه واکنش منطقی دنباله‌رو نگاشتی نقطه به نقطه می‌باشد، لذا به وضوح ناحیه القایی با ناحیه قیدی برابر می‌باشند.

پس طبق نکته (۲) و تعریف (۱)، برنامه‌ریزی خطی دو ترازه (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\min \{cx + dy : Ax + By = b; x, y \geq 0\} \quad (3)$$

برای سادگی نوشتن مدل (۳) قرار می‌دهیم:

$$[A \ B] = A', \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X', \quad (c, d) = C'$$

بنابراین مدل (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\min \{C'^T X' : A'X' = b; X' \geq 0\} \quad (4)$$

که در آن $C' \in C'^I$ ، $A' \in A'^I$ و $b \in b^I$ می‌باشند و $X' \in \mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{R}^m$ با تعریف $z = \text{sgn } x$ داریم: $|z| = T_z x$

بنابراین داریم: $T_z x = (z_i x_i)_{i=1}^m$

با توجه به ماتریس بازه‌ای $A' = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ ، برای هر $y, z \in Y_m$ ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A_{yz} = A_c - T_y A_\Delta T_z,$$

$$A_{ye} = A_c - T_y A_\Delta T_e = A_c - T_y A_\Delta.$$

به طور مشابه برای بردار بازه‌ای

$$y \in \mathbb{R}^m \text{ هر } b^I = [b_c - \delta, b_c + \delta]$$

بردارهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$b_y = b_c + T_y \delta.$$

تعریف ۵: بردار $x \in \mathbb{R}^n$ جواب ضعیف $A^I x = b^I$ است اگر وجود داشته باشد $A \in A^I$ و $b \in b^I$ به طوری که $Ax = b$.

تعریف ۶: دستگاه معادلات بازه‌ای $A^I x = b^I$ را شدنی ضعیف گویند اگر و تنها اگر دارای یک جواب ضعیف نامنفی باشد.

قضیه ۱. دستگاه معادلات خطی بازه‌ای $A^I x = b^I$ شدنی ضعیف است اگر و تنها اگر دستگاه $\underline{A}x \leq \bar{b}$ ، $\bar{A}x \geq \underline{b}$ شدنی باشد. اثبات به (۱۴) مراجعه کنید.

تعریف ۷: دستگاه معادلات خطی بازه‌ای $A^I x = b^I$ شدنی قوی است اگر هر دستگاه $Ax = b$ که $A \in A^I$ و $b \in b^I$ شدنی باشد.

تعریف ۸: دستگاه معادلات خطی بازه‌ای $A^I x = b^I$ را حل‌پذیر گویند اگر جواب داشته باشد و شدنی گویند اگر جواب نامنفی داشته باشد.

۳- روش جدید حل برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماماً بازه‌ای با قیود تساوی

$$\underline{\phi} = \inf \{ IBLP(A'^1, b', \underline{C}', e) \mid \underline{A}'X' \leq \bar{b}, \bar{A}'X' \geq \underline{b}, X' \geq 0 \} \quad (5)$$

ثابت می‌کنیم که $\underline{\phi} = IBLP(A'^1, b', C'^1, e')$ برای این منظور نشان می‌دهیم:

$$\underline{\phi} \leq IBLP(A'^1, b', C'^1, e')$$

ابتدا ثابت می‌کنیم $\underline{\phi} \geq IBLP(A'^1, b', C'^1, e')$ اگر $\underline{\phi} = \infty$ واضح است که

$$\underline{\phi} \geq IBLP(A'^1, b', C'^1, e')$$

حال اگر $\underline{\phi} < \infty$ آنگاه (۵) دارای جواب شدنی است. فرض کنید X' جواب نامنفی $\underline{A}'X' \leq \bar{b}$ و $\bar{A}'X' \geq \underline{b}$ باشد. بنابر تعریف (۵ و ۶) و همچنین قضیه (۱)، X' جواب ضعیف نامنفی $A'^1 X' = b^1$ می‌باشد. در نتیجه وجود دارد $A' \in A'^1$ و $b \in b^1$ به طوری که $A'X' = b$. بنابراین داریم:

$$IBLP(A'^1, b', C'^1, e') = \inf \{ IBLP(A', b, C', e) \mid A' \in A'^1, b \in b^1, C' \in C'^1, e \in e^1 \} \quad (6)$$

$$\leq IBLP(A', b, \underline{C}', e) \leq IBLP(A'^1, b', \underline{C}', e).$$

با گرفتن \inf از طرفین (سمت راست) رابطه (۶) داریم:

$$IBLP(A'^1, b', C'^1, e') \leq \underline{\phi}$$

حال نشان می‌دهیم $\underline{\phi} \geq IBLP(A'^1, b', C'^1, e')$ کافی است نشان دهیم برای هر $A' \in A'^1, b \in b^1, C' \in C'^1$ داریم:

$$\underline{\phi} \leq BLP(A', b, C').$$

اگر $BLP(A', b, C') = \infty$ واضح است که

$$\underline{\phi} \leq BLP(A', b, C')$$

اگر $IBLP(A', b, C', e) < \infty$ آنگاه مسئله (۲) شدنی است. فرض کنید X' جواب شدنی (۲) باشد لذا

مقدار بهینه‌ی مدل (۲) را با $IBLP(A', b, C', e)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین برد مقادیر بهینه‌ی مدل (۲) را می‌توان به صورت

$$\left[IBLP(A'^1, b', C'^1, e'), \overline{IBLP}(A'^1, b', C'^1, e') \right]$$

نوشت به طوری که:

$$IBLP(A'^1, b', C'^1, e') = \inf \{ IBLP(A', b, C', e) \mid A' \in A'^1, b \in b^1, C' \in C'^1, e \in e^1 \},$$

$$\overline{IBLP}(A'^1, b', C'^1, e') = \sup \{ IBLP(A', b, C', e) \mid A' \in A'^1, b \in b^1, C' \in C'^1, e \in e^1 \}.$$

در واقع برای تعیین کران‌های فوق با رویکردی جدید مشابه آنچه برای برنامه‌ریزی خطی بازهای با قیود تساوی ارائه شده (۱۴)، برای دو ترازه استفاده می‌کنیم. حال برای محاسبه‌ی کران‌های

$$IBLP(A'^1, b', C'^1, e')$$

و

$$\overline{IBLP}(A'^1, b', C'^1, e')$$

قضیه‌ی (۲) را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲. داریم:
الف:

$$IBLP(A'^1, b', C'^1, e') = \inf \{ IBLP(A'^1, b', \underline{C}', e) \mid \underline{A}'X' \leq \bar{b}, \bar{A}'X' \geq \underline{b}, X' \geq 0 \}$$

ب:

$$\overline{IBLP}(A'^1, b', C'^1, e') = \sup_{y \in Y_m} IBLP(A'_{y_e}, b_y, \bar{C}', e)$$

اثبات.

اثبات الف. قرار می‌دهیم:

اگر $IBLP(A', b, C', e) = +\infty$ آنگاه مسئله (۴) نشدنی است. لذا دستگاه $A'^T X' = b'$ بنا به تعریف (۷)، شدنی قوی نیست. پس $A'_{ye} X' = b_y$ نیز برای بعضی $y \in Y_m$ شدنی نیست. بنابراین $IBLP(A'_{ye}, b_y, \bar{C}', \bar{e}) = \infty$ لذا داریم $IBLP(A', b, C', e) = \bar{\phi}$ و $\bar{\phi} = \infty$.

اگر $IBLP(A', b, C', e)$ متناهی باشد دوگان (۴) در نظر می‌گیریم:

$$\max \{ b^T \rho \mid A'^T \rho \leq C' \} \quad (7)$$

اگر ρ^* جواب بهینه‌ی مساله (۷) باشد آنگاه داریم: $IBLP(A', b, C', e) = b^T \rho^*$

تعریف می‌کنیم $y = \text{sgn } \rho^*$ در این صورت $|\rho^*| = T_y \rho^*$ و $y \in Y_m$ مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \{ \bar{C}'^T X' \mid A'_{ye} X' = b_y, X' \geq 0 \} \quad (8)$$

دوگان آن عبارت است از:

$$\max \{ b_y^T \rho \mid A'_{ye} \rho \leq \bar{C}' \} \quad (9)$$

مسئله (۹) حل‌پذیر است، چون ρ^* ، $A'_{ye}{}^T \rho^* \leq \bar{C}'$ را حل می‌کند زیرا $|(A' - A'_c)^T \rho^*| \leq \Delta^T |\rho^*|$ ، داریم: $A'_{ye}{}^T \rho^* = (A'_c - T_y \Delta)^T \rho^* = (A'_c{}^T - \Delta^T T_y) \rho^* = A'_c{}^T \rho^* - \Delta^T |\rho^*| \leq (A'_c + A' - A'_c)^T \rho^* = A'^T \rho^* \leq C' \leq \bar{C}'$
 $\sup \{ b^T \rho \mid A'^T \rho \leq C' \} = G(A', b, C') > -\infty$

و با توجه به قضیه دوگان، مسئله (۹) دارای جواب بهینه‌ی $\hat{\rho}$ است که در این صورت $IBLP(A'_{ye}, b_y, \bar{C}', \bar{e}) = b_y^T \hat{\rho}$ بنابراین:

$A'^T X' = b'$ جواب شدنی ضعیف دارد بنا به قضیه (۱)، جواب نامنفی دستگاه $A'^T X' \leq \bar{b}, \bar{A}' X' \geq \bar{b}$ است و داریم:

$$\underline{\phi} \leq IBLP(A'^T, b', \underline{C}', \underline{e}) \leq IBLP(A'^T, b', C'^T, e') \\ \underline{\phi} \leq IBLP(A', b, C', e) \text{ لذا}$$

پس $IBLP(A'^T, b', C'^T, e') \geq \underline{\phi}$ در نتیجه

$$IBLP(A'^T, b', C'^T, e') = \underline{\phi}$$

اثبات قسمت ب. قرار می‌دهیم:

$$\bar{\phi} = \sup_{y \in Y_m} IBLP(A'_{ye}, b_y, \bar{C}', \bar{e})$$

ابتدا نشان می‌دهیم $\bar{\phi} \leq \overline{IBLP}(A'^T, b', C'^T, e')$ چون $A'_{ye} \in A'^T, b_y \in b'$ و $e \in e', C' \in C'^T$

بنابراین:

$$\bar{\phi} \leq \sup \{ IBLP(A', b, C', e) \mid A' \in A'^T, b \in b', C' \in C'^T, e \in e' \} \\ = \overline{IBLP}(A'^T, b', C'^T, e').$$

حال نشان می‌دهیم $\overline{IBLP}(A'^T, b', C'^T, e') \leq \bar{\phi}$ کافی است ثابت کنیم برای هر $A' \in A'^T, b \in b', C' \in C'^T, e \in e'$ داریم:

$$IBLP(A', b, C', e) \leq \bar{\phi}$$

اگر $IBLP(A', b, C', e) = -\infty$ واضح است که

$$IBLP(A', b, C', e) \leq \bar{\phi}$$

اگر (۸) نشدنی باشد آنگاه

$$IBLP(A'_{ye}, b_y, \bar{C}', \bar{e}) = \infty \text{ و } \bar{\phi} = \infty$$

$$IBLP(A', b, C', e) \leq \bar{\phi}$$

اگر (۸) شدنی باشد آنگاه چون

$$IBLP(A', b, C', e) < \infty$$

$$\begin{aligned} \min_{x \geq 0} \quad & F(x, y) = x + 3y \\ \min_{y \geq 0} \quad & f(x, y) = y \\ \text{s.t.} \quad & \frac{5}{8}x + y \leq 5 \\ & \frac{4}{5}x + y \geq 4 \quad (12) \\ & \frac{6}{5}x + y \leq 6 \\ & \frac{5}{2}x + y \geq 5 \end{aligned}$$

که با استفاده از روش بهترین k -ام [۱۵]، برای مدل (۱۵) مقدار بهینه‌ی $IBLP^* = 5$ بدست می‌آید. حال طبق قسمت ب قضیه (۲) کران بالایی برد مقادیر بهینه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\overline{IBLP}(A', b', C', e') = \sup_{y \in Y_m} IBLP(A'_{ye}, b_y, \bar{C}', \bar{e})$$

حال طبق روابط (۱۱) و تعریف (۴)، $A'_{ye} = b$ به صورت زیر محاسبه می‌شود: (۱۳)

$$\begin{aligned} A'_{ye} &= \left(\begin{bmatrix} \frac{57}{80} & 1 \\ \frac{37}{20} & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{7}{80} & 0 \\ \frac{13}{20} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = b_y \end{aligned}$$

بنا به قسمت ب قضیه (۲) و مدل (۱۳) زیر مدل‌های زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \min_{y \geq 0} \quad & F(x, y) = 2x + 5y \\ \min_{y \geq 0} \quad & f(x, y) = 2y \\ \text{s.t.} \quad & \frac{5}{8}x + y = 5 \quad (14) \\ & \frac{6}{5}x + y = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{y \geq 0} \quad & F(x, y) = 2x + 5y \\ \min_{y \geq 0} \quad & f(x, y) = 2y \\ \text{s.t.} \quad & \frac{4}{5}x + y = 4 \quad (15) \\ & \frac{5}{2}x + y = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IBLP(A', b, C', e) &= b^T \rho^* \\ &= (b_c + b - b_c)^T \rho^* \leq b_c^T \rho^* \\ &+ \delta^T |\rho^*| = (b_c^T + \delta^T T_y) \rho^* \\ &= (b_c + T_y \delta)^T \rho^* = b_c^T \rho^* \\ &\leq b_c^T \hat{\rho} = IBLP(A'_{ye}, b_y, \bar{C}', \bar{e}) \leq \bar{\phi} \end{aligned}$$

لذا $\bar{\phi} \leq \overline{IBLP}(A', b', C', e')$ و در نتیجه با توجه به نامساوی $\bar{\phi} \leq \overline{IBLP}(A', b', C', e')$ داریم:

$$\bar{\phi} = \overline{IBLP}(A', b', C', e')$$

بنابراین در مثال (۱) مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازهای با قيود تساوی را با استفاده از قضیه (۲) به چندین زیر مسئله برای بدست آوردن برد مقادیر بهینه تبدیل می‌کنیم.

مثال ۱: مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه زیر را با توجه به قضیه (۲) حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \min_{x \geq 0} \quad & F(x, y) = [1, 2]x + [3, 5]y \\ \min_{y \geq 0} \quad & f(x, y) = [1, 2]y \\ \text{s.t.} \quad & \left[\frac{5}{8}, \frac{4}{5} \right] x + y = [4, 5] \quad (10) \\ & \left[\frac{6}{5}, \frac{5}{2} \right] x + y = [5, 6] \end{aligned}$$

حل: ماتریس‌ها و بردارهای بازهای مربوط به مدل (۱۰) به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} A' &= \begin{bmatrix} \left[\frac{5}{8}, \frac{4}{5} \right] \\ \left[\frac{6}{5}, \frac{5}{2} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} [4, 5] \\ [5, 6] \end{bmatrix} \quad (11) \\ C' &= [[1, 2], [3, 5]], X' = [x, y] \end{aligned}$$

طبق قسمت الف قضیه (۲)، و روابط (۱۱) کران پایین برای برد مقادیر بهینه یعنی،

$$\begin{aligned} \underline{IBLP}(A', b', C', e') &= \\ \inf \{ IBLP(A', b', C', e) \mid \underline{A}' X' \leq \bar{b}, \bar{A}' X' \geq \underline{b}, X' \geq 0 \} \end{aligned}$$

به صورت زیر محاسبه می‌شود:

Hard-NP شناخته می‌شود. در نهایت، مثال عددی برای نشان دادن قابلیت پیاده‌سازی روش مورد نظر ارائه گردید.

$$\begin{aligned} \min_{x \geq 0} \quad & F(x,y) = 2x + 5y \\ \min_{y \geq 0} \quad & f(x,y) = 2y \\ \text{s.t.} \quad & \frac{5}{8}x + y = 5 \quad (16) \\ & \frac{5}{2}x + y = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{x \geq 0} \quad & F(x,y) = 2x + 5y \\ \min_{y \geq 0} \quad & f(x,y) = y \\ \text{s.t.} \quad & \frac{4}{5}x + y = 4 \quad (17) \\ & \frac{6}{5}x + y = 6 \end{aligned}$$

با استفاده از روش بهترین k -ام مدل‌های (۱۴)، (۱۵)، (۱۶)، (۱۷) به ترتیب دارای مقادیر بهینه‌ی

$$\overline{IBLP}_{15}^* = \frac{320}{17}, \quad \overline{IBLP}_{14}^* = \frac{530}{23}$$

$$\overline{IBLP}_{16}^* = 25, \quad \overline{IBLP}_{17}^* = 10. \text{ بنابراین طبق}$$

قسمت ب قضیه (۲) داریم:

$$\begin{aligned} & \overline{IBLP}(A', b', C', e') \\ & = \sup \left\{ \frac{530}{23}, \frac{320}{17}, 25, 10 \right\} = 25 \end{aligned}$$

پس برد مقادیر بهینه به صورت (۵،۲۵) می‌باشد.

۴- نتیجه‌گیری:

در این مقاله برای تعیین کران‌های تابع هدف برنامه‌ریزی خطی دو ترازه با ضرایب بازه‌ای با قیود تساوی با رویکردی مشابه آنچه برای برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای ارائه شده، استفاده نموده و روشی جدید را ارائه نمودیم. در واقع تاکنون پژوهش‌گری در زمینه‌ی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماماً بازه‌ای با قیود تساوی کار نکرده است. به طور کلی تعیین بدترین مقدار تابع هدف وقتی مدل دارای حداقل یک قید تساوی بازه‌ای باشد، به عنوان یک مسئله

- [10] F. Hamidi and H. Mishmast Nehi (2013). Bilevel Linear Programming with Fuzzy Parameters, Iranian Journal of Fuzzy Systems.
- [11] H. Mishmast Nehi and F. Hamidi (2013). Upper and lower bounds for the optimal values of the interval bilevel linear programming problem, Applied Mathematical Modelling.
- [12] J. Bard (1988). Practical bilevel optimization: algorithms and applications, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- [13] G. Alefeld, J. Herzberger (1983). Introduction to interval computations, academic press, INC.
- [14] M. Eledler, L. Nedoma, L. Ramik, L.Rohn, K. Zimmermann (2007). Linear optimization problems with inexact data, Springer.
- [15] W. Bialas and M. Karwan (1984). Two level linear programming, Management Science.
- [1] H. Von Stackelberg (1952). The theory of the market economy, Oxford University Press, New York, Oxford.
- [2] J. Bracken and J. McGill (1973). Mathematical programs with optimization problems in the constraints, Operations Research.
- [3] W. Bialas and M. Karwan (1984). Two level linear programming, Management Science.
- [4] J. Bard and J. Moore (1990). A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem, SIAM J. Sci. Stat. Comput.
- [5] J. Judice and A. Faustino (1992). A sequential LCP method for bilevel linear programming, Annals of Operations Research.
- [6] Y.Lv. T. Hu, G. Wang and Z. Wan (2007). A penalty function method based on Kuhn-Tucker condition for solving linear bilevel programming, Applied mathematics and computation.
- [7] H.I. Calvete and C. Galé and P.M. Mateo (2008). A new approach for solving Linear bilevel programs using genetic algorithms, European Journal of Operational Research.
- [8] R.J. Kuo and Y.S. Han (2011). A hybrid of genetic algorithm and particle swarm optimization for solving bi-level linear programming problem – A case study of supply chain model, Applied Mathematical Modelling.
- [9] H.I. Calvete and C. Galé (2012). Linear bilevel programming with interval coefficients, Journal of Computational and Applied Mathematics.

