دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره سیزدهم، بهار ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

نتایج وجودی جواب برای یک مدل واکنشی - انتشاری با تابع وزن نامحدود و رشد لجستیکی

صالح شاکری[۱]*، قاسم علیزاده افروزی[۲]

(۱)* استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد آیت‌الله امل، دانشگاه آزاد اسلامی، آمل، ایران (نویسنده مسئول).
(۲) استاد، گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۹/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۱/۱۹

چکیده

در این مقاله، با استفاده از روش جواب‌های بالایی و پایینی، به بررسی وجود جواب‌های مثبت برای یک معادله‌ی واکنشی - انتشاری با شرایط مرزی دیریکله تحت شرایطی مناسب می‌پردازیم. این مدل جمعیتی چریدن یک تعداد ثابت علف‌خوار را روی گونه‌های در حال رشد لجستیکی توصیف می‌کند. شکل کلی تابع لجستیکی دارای این ویژگی است که در آن تابع سرانه نرخ رشد نزولی است.

$$\frac{dp}{dt} = r\left(1 - \frac{p}{k}\right)p$$

در اینجا P جمعیت $r > 0$ نرخ رشد جمعیت و K ثابتی مثبت هستند [21].
اما برخی اکوسیستم‌ها وجود دارند که در آنها سرانه نرخ رشد می‌تواند در یک تراکم مثبت به نقطه اوج برسد این اثر "الی" نامیده می‌شود این می‌تواند به خاطر کمبود جفت‌گیری، عدم گرده‌افشانی موثر، ازدیاد شکارچی، و یا تراکم از این‌ها باشد ما در این مقاله بحث خود را تنها به مدل‌های لجستیک محدود می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: جواب‌های بالایی و پایینی، نیمه مثبت گون نامتناهی، رشد مجانبی خطی، وزن نامتناهی، معادله واکنش و انتشار.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: salehshakeri@yahoo.com

۱- مقدمه

پویایی جمعیت شاخه‌ای از علوم زندگی است که به مطالعه تغییرات کوتاه مدت و بلند مدت در اندازه و سن جمعیت‌ها و فرایندهای بیولوژیکی و زیست محیطی تاثیرگذار بر این تغییرات می‌پردازد آنالیز غیرخطی یکی از جذاب‌ترین و پرکاربردترین شاخه‌های آنالیز ریاضی است که در دهه‌های پایانی این قرن توسعه فراوانی یافته است در واقع از مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی پیچیده به مسائل مقدار مرزی غیرخطی می‌رسیم لذا بررسی وجود جواب این‌گونه از مسائل به عنوان یکی از دغدغه‌های اصلی آنالیزدانان در آمده است. به دلیل کاربردهای گسترده این علم در علوم طبیعی، کارهای اساسی بر روی برخی از انواع خاص معادلات شده است.

یک نوع از این معادلات، معادله واکنشی – انتشاری زیر است:

$$u_t = d\Delta u + uf(x,u)$$

که از موارد مهم کاربرد آن می‌توان به مطالعات زیست‌شناسی جمعیتی (از یک گونه) اشاره کرد به طوری که u نشان دهنده تراکم جمعیتی و $d > 0$ ضریب انتشار و $f(x,u)$ میزان آهنگ رشد است. مدل اکولوژی آن توسط اسکلام مطالعه شده [7] اما قبلا در سال 1937 معادلات واکنشی – انتشاری دیگری که کاربردش در مسائل بیولوژیکی است توسط کولموگروف و پتروفسکی بحث و بررسی شده است [9]. در سال 2002 نیز شیواجی و ارگانتی در مورد معادلات لجستیک – انتشاری با برداشت ثابت و $f(x) = m(x) - b(x)u$ را مورد مطالعه قرار دادند [12]. در سال 2006 نیز شیواجی و همکارانش روی مدل‌های واکنشی – انتشاری با اثر ضعیف در ادامه در سال 2009 مدل‌های جمعیتی با اثر قوی را مورد بررسی قرار دادند [10] و سرانجام در سال 2011 وجود حداقل دو جواب را برای مدل جمعیتی با شرایط مرزی غیرخطی را مورد بحث قرار دادند. همچنین نتایج شناخته شده زیادی در ارتباط با وجود و عدم وجود جواب‌های مثبت توسط شیواجی و دیگر دانشمندان برای مدل‌های جمعیتی (معادلات واکنشی – انتشاری) وجود دارد [11].

در این مقاله وجود جواب‌های مثبت یک معادله واکنشی – انتشاری با شرایط مرزی دیریکله

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\Delta_p u = am(x)u^{p-1} - bu^2 - c\frac{u^\gamma}{1+u^\gamma} - K, & x \in \partial\Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

که در آن $p > 1$، $\gamma \geq 2,$ a, b, c, K ، ثابت‌های مثبتی هستند و $M: R_0^+ \to R^+$ تابعی پیوسته و صعودی است. Ω یک دامنه کران‌دار با مرز $(\partial\Omega)$ از کلاس C^2 می‌باشد را با روش جواب‌های بالایی و پایینی و استفاده از اصل مقایسه‌ای مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در اینجا u تراکم جمعیتی و $am(x)u^{p-1} - bu^2$ رشد لجستیکی را نشان می‌دهند.

تابع وزن $m(x)$ با $\|m\|_\infty = l < \infty$ در شرایط $m \in C(\Omega)$ و $m(x) \geq m_0 > 0$ برای $x \in \Omega$ صدق می‌کند.

این مدل جمعیتی چریدن یک تعداد ثابت علف‌خوار را روی گونه‌های در حال رشد لجستیکی توصیف می‌کند. تراکم علف‌خوارها ثابت فرض شده است و رابطه $\frac{cu^\gamma}{1+u^\gamma}$ نرخ چریدن را نشان می دهد. در سطوح بالای تراکم پوشش گیاهی، این پارامتر به حد نهایی c میل می‌کند. زیرا جمعیت چراکننده ثابت است. در اینجا فرض می‌شود که اکوسیستم از لحاظ فضایی همگن است و تراکم پوشش گیاهی ثابت است که البته هر دوی این فرض‌ها برای سیستم‌های چرای مدیریت شده معتبر هستند. این مدل همچنین برای تشریح پویایی جمعیت ماهی‌ها نیز اعمال شده است.

مدل ارایه شده در این مقاله در واقع مدل بهبود یافته [۴] است که در آن نویسندگان با استفاده از روش جواب‌های بالایی و پایینی نتایج وجود جواب را بدست آوردند. هدف این مقاله یافتن شرایط مناسب برای پارامترهای موجود بکار رفته در مساله برای وجود جواب می‌باشد. برای حل چنین مساله‌هایی جمعیتی محدودیت‌هایی را بر روی پارامترها و نحوه ارتباط انها با هم اعمال کرده وسپس با بیان قضیه به اثبات وجود جواب می‌پردازیم.

مفاهیم جواب‌های بالایی و پایینی توسط ناگومو در سال ۱۹۳۷ معرفی شد و او با استفاده از روش پرتابی، وجود حداقل یک جواب برای یک رده از مسائل اشتورم - لیوویل غیرخطی ثابت کرد [2].

فرض کنیم λ_1 اولین مقدار ویژه مسأله

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi = \lambda m(x)|\phi|^{p-2}\phi, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

با تابع ویژه اصلی مثبت ϕ_1 باشد که در شرط $\|\phi_1\|_\infty = 1$ صدق می‌کند (مرجع [۶] را ببینید).

۱-۱ تعریف (جواب بالایی و پایینی):

تابع $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ را یک جواب پایینی (۱) می‌نامیم، هرگاه $\psi \le 0$ روی $\partial\Omega$ و

$$M\left(\int_\Omega |\nabla\psi|^p dx\right) \int_\Omega |\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi \cdot \nabla w dx \le \int_\Omega \left(am(x)\psi^{p-1} - b\psi^2 - c\frac{\psi^\gamma}{\psi^\gamma+1} - K\right) w\, dx \quad (2)$$

روی Ω.

تابع $z \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ را یک جواب بالایی (۱) می‌نامیم، هرگاه $z \ge 0$ روی $\partial\Omega$ و

$$M\left(\int_\Omega |\nabla z|^p dx\right) \int_\Omega |\nabla z|^{p-2}\nabla z \nabla w dx \ge \int_\Omega \left(am(x)z^{p-1} - bz^2 - c\frac{z^\gamma}{z^\gamma+1} - K\right) w\, dx \quad (3)$$

روی Ω .

در این صورت اگر $\psi \le z$ در Ω، آنگاه مسأله (۱) یک جواب $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ دارد به طوری که $\psi \le u \le z$ روی Ω.

۱-۲ لم ([۳]):

اگر ψ یک جواب پایینی و z یک جواب بالایی از (۱) باشند به طوری که $\psi \le z$ در Ω، آنگاه (۱) یک جواب مثبت $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ دارد به طوری که $\psi \le u \le z$ روی Ω .

۱-۳ گزاره:

اگر $a \le \lambda_1$، آنگاه مسأله (۱) جواب مثبت ندارد.

اثبات:

با برهان خلف فرض کنیم یک جواب مثبت u از مسأله (۱) وجود داشته باشد. پس u در رابطه‌ی

$$\begin{aligned} M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right) \int_\Omega |\nabla u|^p dx &\ge M_0\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right) \\ &= M_0 \int_\Omega \left[am(x)u^{p-1} - bu^2 - c\frac{u^\gamma}{1+u^\gamma} - K\right] u\, dx \end{aligned}$$

صدق می‌کند. اما با توجه به تعریف λ_1 (اولین مقدار ویژه) داریم

$$M_0 \int_\Omega |\nabla u|^p dx \ge \lambda_1 \int_\Omega am(x)u^p dx.$$

پس داریم

$$M_0 \int_\Omega \left[am(x)u^{p-1} - bu^2 - c\frac{u^\gamma}{1+u^\gamma} - ,K\right] u\, dx \ge \lambda_1 \int_\Omega am(x)u^p dx$$

و بنابراین

$$\left(a - {}^{\lambda_1}/_{M_0}\right) \int_\Omega m(x)u^p dx \ge \int_\Omega \left(bu^2 + c\frac{u^\gamma}{1+u^\gamma} + K\right) u\, dx \ge 0.$$

چون $u > 0$ و $m(x) \ge m_0 > 0$، پس رابطه فوق مستلزم $a > \lambda_1$ می‌باشد که یک تناقض است. پس (۱) دارای جواب مثبت نمی‌باشد.

۲- نتایج وجودی

در این بخش به بیان و اثبات نتیجه اصلی برای مسأله (۱) می‌پردازیم. روش اثبات بر مبنای اصل مقایسه‌ای می‌باشد ([8]). به سادگی دیده می‌شود که هر جواب پایینی

$$(4)\quad \begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\Delta_p u = am_0 u^{p-1} - bu^2 - c\frac{u^\gamma}{1+u^\gamma} - K, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

یک جواب پایینی (۱) و هر جواب بالایی

$$(5)\quad \begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\Delta_p u = alu^{p-1} - bu^2 - c\frac{u^\gamma}{1+u^\gamma} - K, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

یک جواب بالایی مسأله (۱) است که l قبلاً در بالا تعریف شده است.

فرض کنیم λ_1' اولین مقدار ویژه عملگر $-\Delta$ با شرایط مرزی دیریکله

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi = \lambda' |\phi|^{p-2}\phi\,, & x \in \Omega\,, \\ \phi = 0\,, & x \in \partial\Omega\,, \end{cases}$$

با تابع ویژه اصلی متناظر ϕ_1' باشد به طوری که $\|\phi_1'\|_\infty = 1$ و $\phi_1' > 0$.

۲-۲. قضیه.

فرض کنیم که یک $M_0 > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای $t \in [0,\infty$ اگر $M(t) \geq M_0$، $a > \frac{\lambda_1'}{m_0}$، $b > 0$ و $c > 0$ باشند، آنگاه یک ثابت $K_0(a,b,c,m_0,\gamma)$ وجود دارد به طوری که برای $K < K_0$، مسأله (۱) دارای یک جواب مثبت است.

اثبات:

در اینجا اصل پادماکزیمم به شکل زیر را یادآوری می‌کنیم

[۵]: فرض کنیم λ' مشابه بحث قبل از قضیه باشد. پس $\sigma(\Omega) > 0$ وجود دارد به طوری که برای $\lambda' \in (\lambda_1', \lambda_1' + \sigma)$ مسأله‌ی

$$(6)\quad \begin{cases} -\Delta_p z - \lambda' z^{p-1} = -1 & x \in \Omega \\ z = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

دارای جواب $z_{\lambda'}$ در Ω است به طوری که

$$z_{\lambda'} > 0\,, \qquad \frac{\partial z_{\lambda'}}{\partial \nu} < 0\,,$$

که در آن $\frac{\partial}{\partial \nu}$ بیانگر مشتق در جهت بردار یکه نرمال خارجی بر $\partial\Omega$ است. ثابت می‌گیریم:

$$\lambda_*' \in (\lambda_1'\,,\ \min\{\lambda_1' + \sigma\,,\ m_0 a\}).$$

فرض کنیم $z_{\lambda_*'} > 0$ یک جواب (۶) باشد وقتی که $\lambda' = \lambda_*'$ و $\|z_{\lambda_*'}\|_\infty = \alpha$. تعریف می‌کنیم:

$$\psi := \mu K^{\frac{1}{p-1}} z_{\lambda_*'}\,,$$

که در آن $\mu \geq 1$ در ادامه مشخص خواهد شد. ما μ و $K > 0$ مناسبی را انتخاب خواهیم کرد به طوری که ψ جواب پایینی باشد. فرض کنیم $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} M\left(\int_\Omega |\nabla\psi|^p dx\right) &\int_\Omega |\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\nabla w dx \\ &+ \int_\Omega \Big[am_0\psi^{p-1} - b\psi^2 \\ &- c\frac{\psi^\gamma}{\psi^\gamma + 1} - K\Big] w dx \\ \geq\ & M_0 \int_\Omega |\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\nabla w dx + \\ \int_\Omega & \left[am_0\psi^{p-1} - b\psi^2 - c\frac{\psi^\gamma}{\psi^\gamma+1} - K\right] w dx \\ = \int_\Omega & [-KM_0\mu^{p-1}(\lambda_*' z_{\lambda'_*}^{p-1} - 1) \\ &+ am_0 K(\mu z_{\lambda_*'})^{p-1} \\ &- b(\mu K^{\frac{1}{p-1}} z_{\lambda_*'})^2 \\ -c &\frac{(\mu K^{\frac{1}{p-1}} z_{\lambda_*'})^\gamma}{(\mu K^{\frac{1}{p-1}} z_{\lambda_*'})^\gamma + 1} - K] w\, dx \\ \geq \int_\Omega & [(am_0 - M_0\lambda_*')(\mu z_{\lambda'_*})^{p-1} \\ &- bK^{\frac{3-p}{p-1}}(\mu z_{\lambda_*'})^2 \\ &- c(\mu K^{\frac{1}{p-1}} z_{\lambda_*'})^\gamma \\ &+(\mu^{p-1} - 1)]Kw\, dx. \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم:

$$H(x):=(am_0-M_0\lambda'_*)x^{p-1}-bK^{\frac{3-p}{p-1}}x^2-cK^{\frac{\gamma-p+1}{p-1}}x^\gamma+(\mu^{p-1}-1).$$

پس اگر ما بتوانیم K و μ مناسبی را پیدا کنیم به طوری که برای هر $x\in[0,\mu\alpha]$ داشته باشیم $H(x)\geq 0$، آنگاه ψ یک جواب پایینی خواهد بود.

چون $\mu\geq 1$، پس داریم $H(0)=(\mu^{p-1}-1)\geq 0$ و بنابراین

$$H'(x)=x^{p-2}\left[(p-1)(am_0-M_0\lambda'_*)-2bK^{\frac{3-p}{p-1}}x^{3-p}-c\gamma K^{\frac{\gamma-p+1}{p-1}}x^{p-\gamma+3}\right].$$

این معنی می‌دهد که اگر $H(\mu\alpha)\geq 0$، آنگاه $H(x)\geq 0$، یعنی:

$$(am_0-M_0\lambda'_*)(\mu\alpha)^{p-1}-bK^{\frac{3-p}{p-1}}(\mu\alpha)^2-cK^{\frac{\gamma-p+1}{p-1}}(\mu\alpha)^\gamma+\mu^{p-1}-1\geq 0.$$

قرار می‌دهیم

$$G(K):=(am_0-M_0\lambda'_*)(\mu\alpha)^{p-1}-bK^{\frac{3-p}{p-1}}(\mu\alpha)^2-cK^{\frac{\gamma-p+1}{p-1}}(\mu\alpha)^\gamma+\mu^{p-1}-1.$$

یادآوری می‌کنیم که

$$G(0)=(am_0-M_0\lambda'_*)(\mu\alpha)^{p-1}+(\mu^{p-1}-1)>0,$$

زیرا $\mu\geq 1$ و $am_0>M_0\,\lambda'_*$. همچنین داریم

$$G'(K)=-b\left(\frac{3-p}{p-1}\right)(\mu\alpha)^2K^{\frac{4-2p}{p-1}}-c\left(\frac{\gamma-p+1}{p-1}\right)K^{\frac{\gamma-2p+2}{p-1}}(\mu\alpha)^\gamma<0.$$

بنابراین برای μ و γ داده شده یک $K^*=K^*(a,b,c,\mu,\gamma,m_0)>0$ یکتایی وجود دارد به طوری که $G(K^*)=0$. چون

$$G(K)\leq(am_0-M_0\lambda'_*)(\mu\alpha)^{p-1}-b(\mu\alpha)^2K^{\frac{3-p}{p-1}}+(\mu^{p-1}-1)=:\widetilde{G}(K),$$

می‌بینیم که

$$K^*\leq\left[\frac{(am_0-M_0\lambda'_*)(\mu\alpha)^{p-1}+(\mu^{p-1}-1)}{b\mu^2\alpha^2}\right]^{\frac{3-p}{p-1}}:=K_1(a,b,\mu,m_0).$$

یادآوری می‌کنیم که $K_1(a,b,\mu,m_0)$ برای هر $\mu\in[1,\infty)$ کراندار می‌باشد. بنابراین K^* نیز برای $\mu\in[1,\infty)$ کراندار است. قرار می‌دهیم:

$$K_0(a,b,c,m_0,\gamma):=\sup_{\mu\geq 1}K^*(a,b,c,\mu,m_0,\gamma)>0$$

و

$$\widetilde{K}<K_0\left(y''=f(x,y,y')\,a,b,c,m_0,\gamma\right).$$

با توجه به تعریف پس یک $\tilde{\mu}\geq 1$ وجود دارد به طوری که

$$\widetilde{K}<K^*(a,b,c,\tilde{\mu},m_0,\gamma)<K_0(a,b,c,m_0,\gamma).$$

انتخاب می‌کنیم:

$$\psi=\tilde{\mu}\,\widetilde{K}^{\frac{1}{p-1}}\,z_{\lambda'_*}$$

با $\tilde{\mu}=\mu$. داریم $G(\widetilde{K})\geq 0$ و

$$(am_0-M_0\lambda'_*)(\tilde{\mu}\alpha)^{p-1}-b\widetilde{K}^{\frac{3-p}{p-1}}(\tilde{\mu}\alpha)^2-c\widetilde{K}^{\frac{\gamma-p+1}{p-1}}(\tilde{\mu}\alpha)^\gamma+(\tilde{\mu}^{p-1}-1)\geq 0.$$

بنابراین ψ یک جواب پایینی (۱) خواهد بود.

پس ما یک جواب بالایی z برای (۱) می‌سازیم به طوری که $z\geq\psi$. قرار می‌دهیم $z=\overline{M}e_p$، که در آن $\overline{M}>0$ به طوری که

$$alu^{p-1}-bu^2-c\frac{u^\gamma}{u^\gamma+1}-K\leq\overline{M}$$

برای هر $u\geq 0$ و e_p یک جواب یکتای مثبت

$$\begin{cases}-\Delta_p e_p=1\,, & \text{in }\Omega\,,\\ e_p=0\,, & \text{on }\partial\Omega\,,\end{cases}$$

است. به وضوح برای $w\in W_0^{1,p}(\Omega)$ داریم:

$$\int_\Omega |\nabla z|^{p-2}\nabla z \nabla w \, dx = \int_\Omega \overline{M} w \, dx \geq \int_\Omega \left[a l z^{p-1} - b z^2 - c\frac{z^\gamma}{z^\gamma+1} - K\right] w \, dx.$$

بنابراین z یک جواب بالایی (۵) و در نتیجه یک جواب بالایی (۱) می‌باشد.

با توجه به اصل ماکزیمم داریم $\frac{\partial e_p}{\partial \nu} < 0$ روی $\partial\Omega$ که در آن ν بردار نرمال خارجی در $\partial\Omega$ می‌باشد. ما می‌توانیم $\overline{M} \gg 1$ انتخاب کنیم به طوری که $z = \overline{M} e_p \geq \psi$.

پس طبق لم ۱-۲، مسأله (۱) دارای یک جواب مثبت برای هر $K < K_0(a, b, c, m_0, \gamma)$ است و اثبات کامل می‌شود.

فهرست منابع

[1] R.A Adams, (1975). Sobolev spaces, Academic Press, New York.

[2] M Nagumo, (1937). Uber die Differentialgleichungy y'' = f (x, y, y'), Proceedings of the Physico - Mathematical Society of Japan.

[3] H Amann, (1976). Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces.

[4] R Causey, S Sasi, and R Shivaji, (2010). An ecological model with grazing and constant yield harvesting, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.

[5] Ph Clément, and L.A Peletier, (1979). An anti-maximum principle for second- order elliptic operators, J Differential Equations.

[6] P Drábek, and J Hernández, (2001). Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problems, Nonlinear Anal.

[7] J.G Skellam, (1951). Random dispersal in theoretical populations, Biometrika.

[8] P Drábek, P Kerjčí, and P Takáč, (1999). Nonlinear Differential Equations, CRC Research Notes Math. 404, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL–London – New York – Washington, DC.

[9] A Kolmogoroff, I Petrovsky, N Piscounoff, (1937). Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biological problem, Moscow Univ.

[10] jaffar Ali, R Shivaji, Kellan Wampler, (2009). Population models with diffusion, strong Allee effect and constant yield harvesting, J Math. Anal.

[11] G.A. Afrouzi, S Shakeri, and A Hadjian, (2016). "On the existence of positive solutions for an ecological model with indefinite weight", (Accepted in the Arab Journal of Mathematical Sciences).

[12] S Oruganti, J Shi, and R Shivaji, (2002). Diffusive equation with constant yield harvesting, I: steady states, Trans. Amer. Math.

[13] G.A Afrouzi, N.T Chung, and S Shakeri, (2014). Positive solutions for a infinite semipositone problem involving nonlocal operator, Rend. Semin. Mat, Univ, Padova.

[14] C.O Alves, F.J.S.A Corr^ea, and T.M Ma, (2005). Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchho,type, Comput, Math.

[15] A Bensedik, and M Bouchekif, (2009). On an elliptic equation of Kirchhoff- type with a potential asymptotically linear at infinity, Math. Comput..

[16] F.J.S.A Corr^ea, and G.M Figueiredo, (2006). On an elliptic equation of p - Kirchhoff - type via variational methods, Bull, Aust. Math.

[17] G.A Afrouzi, S Shakeri, and A Hadjian, (2016). On the existence of

positive solutions for an ecological model with indefinite weight, Arab Journal of Mathematical Sciences.

[18] J.J Sun, and C.L Tang, (2011). Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff - type equations, Nonlinear Anal.

[19] T.F Ma, (2005). Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff - type, Nonlinear Anal.

[20] M.H Yang, and Z.Q Han, (2012). Existence and multiplicity results for Kirchhoff - type problems with four superlinear potentials, Appl Anal.

[21] P.F Verhulst, (1838). Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, Correspondance mathzmatique et physique.