دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره سیزدهم، بهار ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

درجه جابه‌جایی تانسوری یک زوج از گروه‌های متناهی

هانیه گلمکانی[۱]، عباس جعفرزاده [۲*]، پیمان نیرومند[۳]

[۱] دانش آموخته دوره دکتری گروه ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.
[۲] استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران (نویسنده مسئول).
[۳] دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۸/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۳/۰۹

چکیده

در این مقاله، درجه جابه‌جایی تانسوری یک زوج از گروه‌های متناهی را مورد بررسی قرار داده‌ایم. با توجه به این که درجه جابه‌جایی نسبی توسط Erdos معرفی شده و خواص آن مورد بررسی قرار گرفته است، بعد از آن آقای دکتر نیرومند به معرفی درجه جابه‌جایی نسبی تانسوری، محاسبه درجه تانسوری نسبی برای بعضی از گروه‌ها و بررسی خواص آن پرداخت. همچنین ارتباط آن را با درجه جابه‌جایی نسبی بیان نمود.

در این مقاله ما به توصیف کوتاهی از درجه جابه‌جایی تانسوری اشاره می‌کنیم و در ادامه توانسته‌ایم رابطه‌هایی برای این درجه جابه‌جایی تانسوری معرفی کنیم. از جمله رابطه‌هایی که ثابت کرده‌ایم این است که اگر زیرگروه‌هایی از یک گروه را در نظر بگیریم، آنگاه چه رابطه‌ای بین درجه جابه‌جایی تانسوری آنها برقرار است، همچنین اگر گروه با شرایط خاصی باشد، آنگاه کران‌هایی برای این درجه جابه‌جایی تانسوری معرفی کنیم.

واژگان کلیدی: درجه جابه‌جایی، درجه جابه‌جایی نسبی، درجه تانسوری

* عهده‌دار مکاتبات Email: jafarzadeh@um.ac.ir

مقدمه:

در این مقاله همه گروه‌ها متناهی در نظر گرفته می‌شوند. فرض کنیم G یک گروه متناهی و N زیر گروه نرمال آن باشد، در این صورت (G, N) را یک زوج از گروه‌ها می‌نامیم. فرض کنیم که G و N بر روی یکدیگر به وسیله عمل مزدوج عمل کنند. یادآور می‌شویم که حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی G و N که به صورت $G\otimes N$ نمایش داده می‌شود گروهی است تولید شده توسط همه مولفه‌های $g\otimes n$ به طوری که برای هر $n.n'\in N$ و $g.g'\in G$ رابطه‌های زیر در آن برقرار است:

$$gg'\otimes n=({}^{g}g'\otimes {}^{g}n)(g\otimes n)$$

$$g\otimes nn'=(g\otimes n)({}^{n}g\otimes {}^{n}n')$$

و همچنین مرکز ساز تانسوری x در G برای هر $x\in G$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$C_G^{\otimes}(x)=\{a\in G: a\otimes x=1_{G\otimes G}\}$$

و به طوری که $C_G^{\otimes}(x)\leq G$ و مرکز تانسوری G که به صورت زیر تعریف می‌شود زیر گروهی از $Z(G)$ است.

$$Z^{\otimes}(G)=\{g\in G: g\otimes x=1_{G\otimes G}\forall x\in G\}$$
$$=\cap_{x\in G} C_G^{\otimes}(x)$$

نگاشت جابه‌جایی $k: G\otimes N\rightarrow [G.N]$ یک اپیمورفیسم از گروه‌هاست به طوری که $kerk=J_2(G)$ یک زیر گروه مرکزی در $G\otimes G$ می‌باشد. در [۳] درجه تانسوری G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d^{\otimes}(G)=\frac{|(x.y)\in G\times G: x\otimes y=1_{G\otimes G}|}{|G|^2}$$

همچنین $d^{\otimes}(G)=1$ اگر و تنها اگر $Z^{\otimes}(G)=G$ از طرف دیگر در [۳] مشاهده می‌شود که $d^{\otimes}(G)=1$ اگر و تنها اگر G یک گروه آبلی باشد. در [۸] درجه جابه‌جایی نسبی G و زیر گروه آن مانند N به فرم $d(N,G)$ تعریف می‌شود. به طوری که برابر است با احتمال این که هر عنصر N با هر عنصر G جابه‌جا شود. در حقیقت $d(G.G)=d(G)$ و همچنین $d(N.G)=1$ اگر و تنها اگر N در مرکز گروه G قرار داشته باشد.

قضیه ۱-۱. [۸، قضیه ۹-۳] اگر H و N دو زیر گروه از G باشند به طوری که $N\leq G$ و $N\subseteq H$ در این صورت $d(H.G)\leq d\left(\frac{H}{N}.\frac{G}{N}\right)d(N)$ و اگر $N\cap[H,G]=1$، آنگاه تساوی برقرار است.

قضیه ۱-۲. اگر G یک گروه دلخواه و p کوچکترین مقسوم علیه اول G باشد، آنگاه

$$(i)\frac{d(G)}{|J_2(G)|}+\frac{|Z^{\otimes}(G)|}{|G|}\left(1-\frac{1}{|J_2(G)|}\right)\leq d^{\otimes}(G)$$

$$(ii)d^{\otimes}(G)\leq d(G)-\left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{|z(G)|-|Z^{\otimes}(G)|}{|G|}\right)$$

در مقاله [۱۲، قضیه ۸-۲] درجه جابه‌جایی تانسوری را هنگامی که $Z^{\otimes}(G)=1$ باشد مورد بررسی قرار داده است.

درجه جابه‌جایی تانسوری یک زوج از گروه‌های متناهی

در این بخش درجه جابه‌جایی تانسوری یک زوج ازگروه‌ها مانند (G, N) را بررسی می‌کنیم به طوری که اگر N =G باشد آنگاه همان درجه جابه‌جایی تانسوری G است.

تعریف: اگر (G, N) یک زوج از گروه‌های متناهی باشند، آنگاه $d^{\otimes}(G,N)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$d^{\otimes}(G.N)=\frac{\{|(g.n)\in G\times N: g\otimes n=1_{G\otimes N}|\}}{|N||G|}$$

واضح است که اگر G=N باشد، آنگاه $d^{\otimes}(G.G)=d^{\otimes}(G)$ و همچنین $Z_G^{\otimes}(N)=N$ اگر و تنها اگر $d^{\otimes}(G.N)=1$

قضیه ۱-۲. اگر (G, N) یک زوج از گروه‌های متناهی باشند، آنگاه

$$d^{\otimes}(G.N)=\frac{1}{|G||N|}\sum_{x\in N}\left|C_G^{\otimes}(x)\right|$$

اثبات: بنا به تعریف نتیجه حاصل می‌شود.

قضیه ۲-۲. [۷، لم ۱-۲] اگر (G, N) یک زوج از گروه‌های متناهی باشند و $x_1, x_2, \ldots, x_t$ مولفه‌های نمایش G کلاس‌های مزدوج در گروه N باشند، آنگاه

$$d^{\otimes}(N.G) = \frac{1}{|N|}\sum_{i=1}^{t}\frac{\left|C_G^{\otimes}(x_i)\right|}{|C_G(x_i)|}$$

قضیه ۳-۲: [۱۴، قضیه ۳-۵]: فرض کنید $(G_1.N_1)$ و $(G_2.N_2)$ دو زوج از گروه‌های متناهی باشند به طوری که $(|G_1|,|G_2|)=1$ در این صورت

$$d^{\otimes}(N_1 \times N_2.G_1 \times G_2) = d^{\otimes}(N_1.G_1)d^{\otimes}(N_2.G_2)$$

قضیه ۴-۲: (i) اگر $H \le G$، آنگاه

$$\left[H: G_H^{\otimes}(x)\right] = \left[G: C_H^{\otimes}(x)\right]$$

(ii) اگر $G = HZ^{\otimes}(G)$، آنگاه

$$\left[H: C_H^{\otimes}(x)\right] = \left[G: C_G^{\otimes}(x)\right]$$

اثبات (i): با توجه به این که $H \le G$ و $C_G(x) \le G$ در این صورت $HC_G(x) \subseteq G$ و داریم:

$$\left|HC_G^{\otimes}(x)\right| = \frac{|H|\left|C_G^{\otimes}(x)\right|}{\left|H \cap C_G^{\otimes}(x)\right|} \le |H|$$

بنابراین $\frac{|\mathrm{H}|}{|\mathrm{C}_{\mathrm{H}}^{\otimes}(\mathrm{x})|} \le \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{C}_{\mathrm{G}}^{\otimes}(\mathrm{x})|}$

(ii) می‌دانیم $Z^{\otimes}(G) = \cap_{x\in G} C_G^{\otimes}(x)$. بنابراین اگر $G = HZ^{\otimes}(G)$، آنگاه $G = HC_G^{\otimes}(x)$. در این صورت

$$\left|HC_G^{\otimes}(x)\right| = \frac{|H|\left|C_G^{\otimes}(x)\right|}{\left|H \cap C_G^{\otimes}(x)\right|} = \frac{|H|\left|G_G^{\otimes}(x)\right|}{\left|C_H^{\otimes}(x)\right|} = |G|$$

بنابراین

$$\frac{|H|}{\left|C_H^{\otimes}(x)\right|} = \frac{|G|}{\left|C_G^{\otimes}(x)\right|}$$

قضیه ۵-۲. اگر $H \le G$، آنگاه

$$d^{\otimes}(H) \le [G:H]d^{\otimes}(G)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} d^{\otimes}(H) &= \frac{1}{|H|^2}\sum_{x\in H}\left|C_H^{\otimes}(x)\right| \\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{x\in H}\frac{\left|C_H^{\otimes}(x)\right|}{|H|} \\ &\le \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\frac{\left|C_G^{\otimes}(x)\right|}{|G|} \\ &= \frac{|G|}{|H||G|^2} \\ &= [G:H]d^{\otimes}(G) \end{aligned}$$

قضیه ۶-۲: اگر $H \le G$، آنگاه

$$d^{\otimes}(G) \le d^{\otimes}(H.G) \le d^{\otimes}(H)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} d^{\otimes}(H.G) &= \frac{1}{|H||G|}\sum_{x\epsilon G}\left|C_G^{\otimes}(x)\right| \\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{x\epsilon G}\frac{\left|C_G^{\otimes}(x)\right|}{|H|} \\ &\ge \frac{1}{|G|}\sum_{x\epsilon G}\frac{\left|C_G^{\otimes}(x)\right|}{|G|} = d^{\otimes}(G) \end{aligned}$$

قضیه ۷-۲. اگر $H_1 \le H_2 \le G$، آنگاه $d^{\otimes}(H_1.H_2) \ge d^{\otimes}(G.H_2)$ و

$$d^{\otimes}(H_2.G) \le d^{\otimes}(H_1.G)$$

اثبات: بنا به تعریف و قضیه ۶-۲ نتیجه حاصل می‌شود.

قضیه ۸-۲. [۱۴، قضیه ۴-۵]: اگر $N \trianglelefteq G$ و $H \le G$، آنگاه $d^{\otimes}(H.G) \le d^{\otimes}\left(\frac{H}{N}.\frac{G}{N}\right)$ همچنین تساوی برقرار است هرگاه $N \subseteq Z_G^{\otimes}(H)$.

توجه: اگر G یک گروه متناهی باشد و $N \le G$ باشد، آنگاه G مرکز تانسوری در N یک زیرگروه مرکزی در N است به طوری که به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z_G^{\otimes}(N) = \{n \in N: g\otimes n = 1_{\otimes}.\forall g \in G\}$$

و همچنین داریم:

$$Z_G^{\otimes}(N) = \cap_{n\in N} C_G^{\otimes}(n)$$

.

قضیه ۲-۹. اگر $(G.N)$ و $(G.H)$ دو زوج از گروه‌های متناهی باشند به طوری که $N \subseteq H$، آنگاه دنباله زیر دقیق است.

$$(H\otimes N)\times(G\otimes N)\to G\otimes N\to \frac{G}{N}\otimes\frac{H}{N}\to 1$$

اثبات: اثبات به طور مشابه که در مقاله [۱۰، گزاره ۹] آمده است حاصل می‌شود.

قضیه ۲-۱۰. اگر G یک گروه متناهی باشد، آنگاه فاکتور گروه $\frac{C_N(x)}{C_N^{\otimes}(x)}$ برای هر $x\in G$ با زیر گروه $J_2(G,N)$ یکریخت است.

اثبات: برای هر $x\in G$ تعریف می‌کنیم:

$f: C_N(x)\to J_2(G.N)$ به طوری که:

$y\longmapsto y\otimes x$ با توجه به رابطه

$$g'(g\otimes n)(g\otimes n)^{-1}=g'\otimes[g.n]$$

برای هر $g.g\in G'$ و $n\in N$. بنابراین عناصر $J_2(G.N)$ تحت عمل G ثابت باقی می‌مانند و از طرفی f همریختی است و هسته آن $C_N^{\otimes}(x)$ می‌باشد.

قضیه ۲-۱۱. فرض کنید (G,N) یک زوج از گروه‌های متناهی باشند و p کوچکترین مقسوم علیه اول از $|G|$ باشد به طوری که $p\,\big|\,|G|$. در این صورت

$$(i)\ \frac{d(G.N)}{|J_2(G.N)|}+\frac{|Z^{\otimes}(G.N)|}{|G|}\left(1-\frac{1}{|J_2(G.N)|}\le d^{\otimes}(G.N)\right)$$

$$(ii) d^{\otimes}(G.N)\le d(G.N)-\left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{|Z(G.N)|}{|G|}\right)$$

اثبات: بنا به قضیه ۲-۱۰ و قضیه ۱-۵ در [۱۴] نتیجه حاصل می‌شود.

قضیه ۲-۱۲. اگر p کوچکترین مقسوم علیه اول از $|G|$ به طوری که $p\,\big|\,|G|$ باشد، آنگاه برای هر زوج از گروه‌های متناهی (G,N) داریم:

$$\frac{|Z^{\otimes}(G.N)|}{|N|}+\frac{p(|N|-|Z^{\otimes}(G.N)|)}{|G||N|}\le d^{\otimes}(G.N)\le\frac{|Z^{\otimes}(G.N)|}{|N|}+\frac{|N|-|z^{\otimes}(G.N)|}{p|N|}$$

اثبات:

$$d(G.N)=\frac{1}{|G||N|}\sum_{x\in N}|C_G^{\otimes}(x)| =\frac{1}{|G||N|}\left(\sum_{x\in Z^{\otimes}(G.N)}|C_G^{\otimes}(x)|+\sum_{x\notin Z^{\otimes}(G.N)}|C_G^{\otimes}(x)|\right)$$

با توجه به این که $p\le|c_G^{\otimes}(x)|\le\frac{|G|}{P}$ برای هر $x\notin Z^{\otimes}(G.N)$ داریم:

$$\frac{1}{|G||N|}\left(\sum_{x\in Z^{\otimes}(G.N)}|C_G^{\otimes}(x)|+\sum_{x\notin Z^{\otimes}(G.N)}|C_G^{\otimes}(x)|\le\frac{|Z^{\otimes}\ \ (G.N)|}{|N|}+\frac{|N|-|Z^{\otimes}(G.N)|}{P|N|}\right)$$

از سوی دیگر

$$d^{\otimes}(G.N)=\frac{1}{|G||N|}\sum_{x\in N}|C_G^{\otimes}(x)| =\frac{1}{|G||N|}\left(\sum_{x\in Z^{\otimes}(G.N)}|C_G^{\otimes}(x)|+\sum_{x\notin Z^{\otimes}(G.N)}|C_G^{\otimes}(x)|\right)\ge\frac{|Z^{\otimes}(G.N)|}{|N|}+\frac{P(|N|-|Z^{\otimes}(G.N)|)}{|G||N|}$$

فهرست منابع

[1] N.M.M Ali, and N.H Sarmin, (2006). On some problems in group theory of probabilistic nature, Technical Report, Department of Mathematics, Universiti Technologi Malaysia.

[2] M Alghamdi, and F.G Russo, (2012).A generalization of the probability that the commutator of two group elements is equal to a given element, Bull, Iranian Math.

[3] R Brown, D.L Johnson, and E.F Robertson, (1987). Some computation of nonabelian tensor products of groups.

[4] P Erdos, P Turan, (1968). On some problems of statistical group theory, Acta Math, Acad. Sci. Hung.

[5] G Ellis, (1995). Tensor products and q-crossed modules, J. London math.

[6] Erfanian R, Barzegar M, and Farrokhi D.G. Finite groups with three relative commutativity degrees, to appear in Bull, Iranian Math.

[7] Erfanian M, Farrokhi D.G, (2013). On the probability of being a 2-Engel groups, International Journal of group theory.

[8] Erfanian R, Rezaei, and P Lescot, (20070. On the relative commutativity degree of a subgroup of a finite group, Comm. Algebra.

[9] R.M Guralnich, and G.R Robinson, (2006). On the commuting probability in finite groups, J. Algebra.

[10] W.P Kappe, (19610. Die A norm einer gruppe, Illinois, J. Math.

[11] P Lescot, (1995). Isoclinism classes and commutativity degrees of finite goups, J. Algebra.

[12] P Niroomand, and R Rezaei, (2013). The exterior degree of pair of finite groups, Mediterranean Journal of mathematics.

[13] p Niroomand, F.G Russo, (2016). Probabilistic properties of the relative tensor degree of finite groups, Indagationes mathematicae.

[14] P Niroomand, and F.G Russo, (2017). On the tensor degree of finte groups, Ars Combinatoria.