دسترسی در سایت http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره سیزدهم، بهار ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

مخروط‌های مماسی در نقاط مضاعف بخش‌یاب‌های پریم – متعارف خم‌های با گونای ۷

علی باجروانی *

[۲] استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، آذربایجان، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۵/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۳/۰۹

چکیده

فرض کنید η کلافی خطی روی خم هموار X با خاصیت $\eta^2 = 0$ باشد به طوری که π، پوشش مضاعف القا شده توسط کلاف خطی η، نگاشتی اتاله باشد. همچنین فرض کنید X مدل پریم – تیتای خم X، متناظر به کلاف خطی K_X . بوده و Q ابررویه‌ی درجه‌ی ۲و از رتبه‌ی ۴ و شامل X باشد. در این مقاله، پس از اثبات نرمال تصویری بودن مدل پریم – تیتای خم‌های با اندیس کلیفرد ۲، شرطی لازم برای مخروط مماسی بودن Q بدست می‌آوریم. تحت مفروضاتی خاص برای این شرط لازم عکسی بدست می‌آوریم. مطالعه‌ی خود را با ارائه‌ی مثالی از خم‌های با گونای ۷ و از گونالیتی۴، در فصل ۴ تکمیل خواهیم کرد. شرط لازم و کافی بدست آمده برای مخروط مماسی بودن Q برای مطالعه‌ی این مثال از اهمیت بسزایی برخوردار است. اهمیت مثال بدست آمده در فصل ۴ تا حدود زیادی در مقدماتی بودن آن و قابل تعمیم بودن آن است.

واژه‌های کلیدی: پوشش مضاعف، خم هموار، کلاف خطی، مخروط مماسی، نرمال تصویری.

عهده‌دار مکاتبات: Email: bajravani@azaruniv.ac.ir

۱- مقدمه

در سرتاسر این مقاله، میدان اعداد مختلط به عنوان میدان پایه در نظر گرفته خواهد شد.

به ازای عدد صحیح و نامنفی n و خم هموار Z، چندگونای ژاکوبی، چندگونای پیکارد از درجه‌ی n و بخش‌یاب تیتای خم Z را به ترتیب با نمادهای $J(Z)$، $Pic^n(Z)$ و Θ_Z نشان خواهیم داد.

۱-۱ تعریف: فرض کنید X خم هموار از گونای g، Y خمی هموار و $\pi: Y \to X$ پوشش مضاعفی از X باشد. ریختپایی Nm، که از چندگونای $Pic^{2g-2}(Y)$ به چندگونای $Pic^{2g-2}(X)$ با ضابطه‌ی

$$Nm\left(\mathcal{O}\left(q_1+\cdots+q_{2g-2}\right)\right) = \mathcal{O}(\pi(q_1)+\cdots+\pi(q_{2g-2}))$$

تعریف می‌شود، ریختپایی نُرم القاشده از پوشش مضاعف π، نامیده می‌شود که در آن $\mathcal{O}\left(q_1+\cdots+q_{2g-2}\right)$، کلاف خطی متناظر به بخشیاب $q_1+\cdots+q_{2g-2}$ است.

۱-۲ لم و تعریف: بین مجموعه‌ی کلاف‌های خطی روی خم هموار X با خاصیت $0 =$ ۲، و مجموعه‌ی پوشش‌های مضاعف مانند $\pi: Y \to X$، که π ریختپایی اتاله باشد، تناظری دوسویی موجود است.

برهان. رجوع شود به تمرین ۲.۷، صفحه‌ی ۳۰۶ از مرجع [۵].

- پوشش مضاعف $\pi: Y \to X$ را که متناظر به کلاف خطی با خاصیت $0 =$ ۲ است، پوشش مضاعف القا شده از کلافی خطی می‌گوییم و با نماد π نمایش می‌دهیم.

۱-۳ قضیه و تعریف: فرض کنید کلافی خطی روی خم هموار X با خاصیت $0 =$ ۲ بوده و $\pi: Y \to X$ پوشش مضاعف القا شده از آن باشد. ثابت می شود مجموعه‌ی

$$□(\pi) := \left\{L \in J(Y): Nm(L) = K_X.\ h^0(L) \equiv 0 \left(mod\ ۲\right)\right\}$$

یک زیرچندگونای آبلی از چندگونای آبلی $J(Y)$ است.

برهان. مراجعه شود به فصل ۱۴ از مرجع [3].

- چندگونای $□(\pi)$، چندگونای پریم ریختپایی π نامیده می‌شود.
- در فصل ۱۴ از مرجع [3] همچنین ثابت می‌شود زیرمجموعه‌ی

$$\mathbb{E}(\pi) := \left\{L \in \mathbb{P}(\pi): h^0(L) \geq ۲\right\}$$

بخش‌یابی ازچند گونای $\mathbb{P}(\pi)$ است. بخش‌یاب $\mathbb{E}(\pi)$ را بخش‌یاب پریم — تیتای ریختپایی π می‌گویند.

- در مرجع فوق، همچنین نشان داده می‌شود که می‌توان مجموعه نقاط تکینی $\mathbb{E}(\pi)$ را توسط مجموعه‌ی زیر نمایش داد:

$$\{L \in \mathbb{P}(\pi): h^0(L) \geq 4\} \cup \left\{L \in \mathbb{P}(\pi): h^0(L) \geq ۲ \middle| \mathbb{P}\left(H^0(K_X.)\right) \subseteq TC_L(\Theta_Y)\right\},$$

که در آن $TC_L(\Theta_Y)$ مخروط مماسی Θ_Y در نقطه‌ی L است. این مجموعه را با نماد $Sing\left(\mathbb{E}(\pi)\right)$ نشان خواهیم داد.

- فرض کنید

$$\varphi_{K_X \otimes \eta}: X \to \mathbb{P}^{g-2} := \mathbb{P}(H^0(K_X \otimes \eta))$$

ریختپایی حاصل از کلاف خطی $K_X \otimes \eta$ باشد. برد این ریختپایی، یعنی $\varphi_{K_X \otimes \eta}(X)$، مدل پریم — متعارف متناظر به η از خم X نامیده می‌شود و با نماد X نشان داده خواهد شد.

۱-٤ تعریف: کلاف خطی L متعلق به $Sing\left(\mathbb{E}(\pi)\right)$، یک نقطه‌ی تکینی پایا از بخشیاب پریم - تیتا، $\mathbb{E}(\pi)$، گفته می‌شود هرگاه داشته باشیم $h^0(L) \geq$ ۴.

۱-۵ تعریف: فرض کنید Q ابررویه‌ای درجه‌ی ۲ در فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ باشد که توسط چندجمله‌ای مربعی F تعریف شده باشد. رتبه‌ی Q برابر رتبه‌ی دو فرمی مربعی F تعریف می‌شود.

۱-٦ نمادگذاری: فرض کنید X خمی هموار، تصویری و غیر ابربیضوی بوده و کلاف خطی $K_X.$

پردامنه باشد. مکان هندسی نقاط با چندگانگی ۲ در $\mathbb{E}(\pi)$ را با نماد $Sing_2(\mathbb{E}(\pi))$ نمایش می‌دهیم. همچنین مکان هندسی ابررویه‌های درجه‌ی ۲ و از رتبه‌ی ۴ در $\mathbb{P}(H^0(K_X.))$ که شامل خم X هستند، با نماد $I_{X.2}(4)$ نشان داده خواهد شد.

۱-۷ تعریف: چنانچه X خمی هموار بوده و n عددی طبیعی باشد، n-امین ضرب متقارن خم X بصورت زیر تعریف می‌شود

$$X_d := X \times \ldots \times X/S_d$$

که در آن S_n گروه متقارن از مرتبه n است.

X_d چند گونایی هموار از بعد d است.

۱-۸ تعریف: به ازای اعداد طبیعی n و r با شرط $0 < 2r < d$ مجموعه‌ی X_n^r، که ثابت می‌شود زیر طرحی از چندگونای هموار X_n است، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$X_n^r := \{D \in X_n | h^0(\mathcal{O}(\mathrm{D})) \geq r + 1\}$$

۱-۹ تعریف: فرض کنید بافه‌ای منسجم روی طرح تصویری X بوده و n عددی صحیح باشد. ، n- منظم گفته می‌شود هرگاه به ازای هر عدد طبیعی i تساوی $H^{\mathrm{i}}((\mathrm{m}-\mathrm{i})) = 0$ برقرار باشد.

۱-۱۰ تعریف: کلاف خطی L روی خم هموار X را ناویژه گویند هرگاه داشته باشیم $H^1(L) = 0$.

۱-۱۱ تعریف: فرض کنید m عددی طبیعی باشد. گوییم خم X در فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ خم m-نرمال است هرگاه همریختی $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \to H^0(\mathcal{O}_X(m))$ پوشا باشد.

۱-۱۲ تعریف: گوییم خم X در فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ نرمال تصویری است هرگاه به ازای هر عدد طبیعی m خم X در $\mathbb{P}^n$، m- نرمال باشد.

۱-۱۳ تعریف: کلاف خطی L روی خم هموار X را پردامنه گوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه‌ی $p.q$ از خم X داشته باشیم $h^0(L(-p-q)) = h^0(L) - 2$.

چندگونای پریم، $\mathbb{P}(\pi)$، و بخش‌یاب پریم - تیتا، $\mathbb{E}(\pi)$، دارای برخی خواص مشابه با خواص ژاکوبی و بخش‌یاب تیتای خم‌ها هستند. از جمله این که مخروط مماسی در نقاط تکینی پایای $\mathbb{E}(\pi)$، ابررویه‌ای مربعی و شامل مدل پریم – متعارف متناظر به از خم X است. از طرف دیگر، علی‌رغم این که $\mathbb{P}(\pi)$ در بسیاری از خواص جالب دیگر با چندگوناهای ژاکوبی خم‌ها مشترک است، در برخی خواص قابل ذکر، تفاوت‌های عمده‌ای با چندگوناهای ژاکوبی خم‌ها دارد. از جمله این که مخروط مماسی در نقاط تکینی پایای $\mathbb{E}(\pi)$، ابررویه‌ای مربعی از رتبه‌ی حداکثر ۶ است، در حالی که مخروط‌های مماسی در حالت ژاکوبی‌ها، ابررویه‌ای مربعی از رتبه‌ی حداکثر ۴ هستند. چنین تفاوت‌هایی منجر به هندسه‌ی غنی و زمینه‌های تحقیقاتی گسترده‌ای در نظریه‌ی چندگوناهای آبلی شده‌اند.

در این مقاله به مطالعه‌ی برخی از خواص $\mathbb{P}(\pi)$، $\mathbb{E}(\pi)$ و X می‌پردازیم. ابتدا در مورد خم هموار X که در وضعیت عمومی بوده و گونالیتی آن حداقل ۲ است، ثابت می‌کنیم که هر مدل پریم - متعارف آن در $\mathbb{P}^{g-۲}$ نرمال تصویری است.

در مورد چندگوناهای ژاکوبی خمها و ابررویه‌های مربعی با رتبه‌ی حداکثر ۴ که شامل مدل متعارف خمی جبری و هموار باشند، قضیه‌ی ۱.۴ از مرجع [2] شرطی معادل با مخروط مماسی بودن آنها معرفی میکند. هدف بعدی این مقاله بدست آوردن شرطی مشابه این شرط برای ابررویه‌هایی است که مربعی و از رتبه‌ی۴ بوده و شامل حداقل یک مدل پریم – متعارف از یک خم هموار هستند. این هدف در قضیه‌های ۳-۲ و ۳-۳ محقق می‌شود. برای اثبات این قضیه‌ها از قضیه‌ی ۱۴-۱، به شکلی اساسی استفاده خواهد شد.

۱۴-۱ قضیه. فرض کنید $\pi: \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ پوششی مضاعف و اتاله از خم X باشد. اگر $\tilde{p}$ و $\tilde{q}$ نقاطی از خم Y و $L_{\tilde{p}.\tilde{q}}$ خط گذرنده بر این دو نقطه، واقع در $\mathbb{P}^{2g-2}$ بوده و به ازای نقطه‌ای مانند p از X داشته باشیم
$\pi^{-1}(p) = \{\tilde{p}.\tilde{q}\}$،
آنگاه تساوی $\varphi_{K_X.\eta}\big(\pi(p)\big) = L_{\tilde{p}.\tilde{q}} \cap \mathbb{P}^{g-2}$ برقرار خواهد بود.

برهان. مراجعه شود به $Claim\ 1$ از مرجع [7].

مقاله را با ارائه‌ی مثالی از خم‌های ۴- گونال و مدلی پریم-متعارف از آنها در فصل ۴ به اتمام می‌رسانیم. یادآوری می‌کنیم که اغلب مثال‌های صریح موجود از چندگوناهای پریم عبارتند از ژاکوبی‌ها، چندگوناهای پریم خم‌های ۳- گونال، چندگوناهای پریم خم‌های دوبیضوی وچندگوناهای پریم خم‌های درجه‌ی ۵ هموار مسطح. مثال درست شده در فصل ۴ از این لحاظ حائز اهمیت است که اولا متفاوت از همه‌ی این ساختارها و مثال‌های موجود بوده و ثانیا شگرد استفاده شده در ساختار آن قابل تعمیم به خم‌های مسطح با گونالیتی‌های بالاتر است.
متذکر می‌شویم که با تغییراتی جزیی در تکنیک استفاده شده در این مثال، می توان آن را به خم‌های با گونالیتی‌های بالاتر نیز تعمیم داد. لذا، با ساختاری مشابه با ساختار مثال حاضر، می توان مثال‌هایی ازچندگوناهای پریم خم‌های با گونالیتی بالاتر درست کرد.

۲. نرمال تصویری بودن خم‌های عمومی با اندیس کلیفرد ۲

ادواردو سرنزی و هربرت لَنق در مرجع [4] ثابت کرده‌اند که مدل متعارف - پریم خم‌های با اندیس کلیفرد حداقل ۳ در فضای تصویری متعارف - پریم، نرمال تصویری هستند. در این بخش گام بعدی از کار سرنزی و لنق را تکمیل می‌کنیم. ابتدا لم زیر را، به دلیل ساده بودن برهان آن، بدون اثبات بیان می‌کنیم.

۱- ۲ لم. فرض کنید X خمی هموار بوده و L کلافی خطی روی X باشد. در این‌صورت L یک کلاف خطی n- منظم است اگر و تنها اگر $(n-1)$- نرمال بوده و $L(1)$ ناویژه باشد.

۲-۲ قضیه. فرض کنید X خم هموار بوده و در بین خم‌های با اندیس کلیفرد ۲ عمومی باشد. همچنین فرض کنید $\pi: Y \to X$ نگاشتی اتاله از درجه‌ی ۲ باشد که توسط کلاف خطی η، با شرط ${}^{2} = 0$، القا شده است. در این صورت مدل پریم - متعارف خم X، در $\mathbb{P}^{g-2}$ نرمال تصویری است. همچنین کلاف خطی $K_X.\eta$ روی چنین خمی، کلافی پردامنه است.

برهان. فرض کنید m عددی طبیعی باشد. دنباله‌ی دقیق $0 \to I_{X_\eta}(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-2}}(m) \to \mathcal{O}_{X_\eta}(m) \to 0$
را در نظر بگیرید. در حالت $m = 1$، با توجه به این که X_η مشمول در هیچ ابررویه‌ای از $\mathbb{P}^{g-2}$ نمی‌باشد، لذا حکم بدیهی است. فرض کنید $m > 1$. بنابر لم ۱.۲، برای اثبات m- نرمال بودن خم X_η کافی است ثابت کنیم خمی $(\mathrm{m}+1)$- منظم است. بدین منظور، با استفاده از دنباله‌ی دقیق فوق، کافی است ثابت کنیم که کلاف خطی $\mathcal{O}_{X_\eta}$ بافه‌ی m-منظم است. به ازای $i \geq 2$، با استفاده از قضیه‌ی صفرساز گروتندیگ، داریم:

$$H^i\left(X_\eta.\mathcal{O}_{X_\eta}(m-i)\right) = 0 .$$

به ازای $i = 1$، با استفاده از قضیه‌ی ریمان[2] - رخ[3] و قضیه‌ی دوگانی سر ایزومرفیسم‌های زیررا بدست می‌آوریم

$$H^1\left(X_\eta.\mathcal{O}_{X_\eta}(m-1)\right) \cong H^1\big(X_\eta.(m-1)K_X.\eta\big) \cong (H^0(X.(-i+1)K_X.\eta)) = 0,$$

که در آن V نمایشگر دوگان فضای برداری V است. ایزومورفیسمی‌های فوق اثبات m- نرمال بودن X_η در $\mathbb{P}^{g-2}$ را تکمیل می‌کنند.

[2] Riemann
[3] Roch

برای اثبات پردامنه بودن کلاف خطی $K_X.\eta$، توجه داریم که به ازای نقاطی مانند x و y از X، برقراری تساوی

$$h^0\big(K_X.\eta(-x-y)\big) = h^0(K_X.\eta) - 1$$

وجود اعضایی از X مانند z و w را ایجاب می‌کند به طوری که x، y، z و w در روابط

$$2x + 2y \sim 2z + 2w \in g_4^1$$

و $x + y \nsim z + w$ زیر صدق می‌کنند. این با عمومی بودن خم X درتناقض است.

۳. مماس‌های مخروطی از رتبه ۴

فرض کنید X خمی هموار، تصویری و غیر ابربیضوی بوده و $\pi: Y \to X$ پوشش اتاله‌ی مضاعف القا شده توسط کلاف خطی η باشد که توان دوم η برابر کلاف خطی بدیهی، یعنی $\mathcal{O}_X$، بوده و کلاف خطی $K_X.$ پردامنه باشد. مکان هندسی نقاط با چندگانگی ۲ در $\mathbb{E}(\pi)$ را با نماد $Sing_2(\mathbb{E}(\pi))$ نمایش می‌دهیم. همچنین مکان هندسی ابررویه‌های درجه‌ی ۲ و از رتبه‌ی ۴ در $\mathbb{P}(H^0(K_X.))$ که شامل خم X هستند، با نماد $I_{X.2}(4)$ نشان داده خواهد شد.

۱-۳ قضیه. فرض کنید $L \in Sing_2(\mathbb{E}(\pi))$. مخروط مماسی $\mathbb{E}(\pi)$ در نقطه‌ی L، ابررویه‌ای مربعی در $\mathbb{P}(H^0(K_X.))$ بوده و شامل X است اگر و فقط اگر L تکینگی پایا بوده و داشته باشیم: $h^0(L) =$ ..

برهان. فرض کنیم $L \in Sing_2(\mathbb{E}(\pi))$ و Q مخروط مماسی $\mathbb{E}(\pi)$ در نقطه‌ی تکراری L و $\tilde{Q}$ مخروط مماسی بخش‌یاب تیتای خم Y در نقطه‌ی L باشد. اگر Q ابررویه‌ای مربعی در $\mathbb{P}(H^0(K_X.))$ و شامل X باشد آنگاه طبق نتیجه‌ی 6.2.5 از مرجع[5] خواهیم داشت $h^0(L) \geq ۴$. در صورت برقراری نامساوی اکید $h^0(L) > ۴$، بنابر زوج بودن $h^0(L)$، نامساوی $h^0(L) \geq ۶$ نیز برقرار خواهد بود. براساس این نامساوی، قضیه‌ی کمف[۴]-ریمان نامساوی $\deg(\tilde{Q}) \geq ۶$ را ایجاب می‌کند که مجددا با استفاده از قضیه‌ی کمف – ریمان نامساوی $\deg(Q) \geq ۳$ از آن نتیجه خواهد شد. نامساوی آخر در تناقض با تساوی $\deg(Q) = 2$ است. لذا تساوی $h^0(L) = ۴$ حاصل خواهد شد.

بالعکس اگر L یک تکینگی پایا از $\mathbb{E}(\pi)$ با خاصیت $h^0(L) = 4$ باشد، نتیجه‌ی 6.2.5 از مرجع [5] به همراه قضیه‌ی کمف – ریمان مجدداً ایجاب می‌کنند که $X \subset Q \subset \mathbb{P}(H^0(K_X.))$ و $\deg(Q) = ۲$. این اثبات قضیه را کامل می‌کند.

۲-۳ قضیه. فرض کنید $L \in Sing_2(\mathbb{E}(\pi_\eta))$ و $Q \in I_{X.2}(4)$ مخروط مماسی $\mathbb{E}(\pi)$ در نقطه‌ی L باشد. در این صورت یکی از خانواده‌های خط‌کشی کننده‌ی Q یک سری خطی کامل، g_d^1، روی خم X می‌برد که در آن $g - 3 \leq d \leq g - 1$ و به ازای کلافی خطی مانند T، تساوی $۲\mathcal{O}(g_d^1) \otimes T = K_X$ برقرار است.

برهان. اگر $Q = Q_L \in I_{X.2}(4)$ مخروط مماسی $\mathbb{E}(\pi)$ در $\tilde{L}$ باشد، آنگاه یکی از خانواده‌های خط‌کشی کننده‌ی آن یک g_d^1، روی X_η القا خواهد کرد. به ازای بخش‌یاب دلخواه E، که به عنوان عضوی از سری‌خطی g_d^1 درنظرگرفته می‌شود، تساوی $dim(\langle E\rangle) = g - 3$،

مستقیما از شکل هندسی قضیه‌ی ریمان – رخ نتیجه می‌شود. این تساوی به راحتی نامساوی $d = deg(E) \geq g - 3$ را نتیجه می‌دهد. به ازای هر بخش‌یاب $\tilde{E}$، که عضوی از فضای Y_{2g-2}^3 است، با قرار دادن $\tilde{L} := \mathcal{O}(\tilde{E})$، فضای خطی $\langle E\rangle$ منطبق بر فضای خطی $\langle\tilde{E}\rangle \cap \mathbb{P}(H^0(K_X.))$ خواهد شد، مراجعه شود به مرجع [6]. به ازای هرنقطه‌ی p از خم X با قرار دادن $\pi^{-1}(p) = \{\tilde{p}.\tilde{q}\}$ و با بکار بردن قضیه‌ی (1.14) معلوم می‌شود که

[4] Kempf

$p \in Supp(E)$ اگر و تنها اگر $\{\tilde{p}.\tilde{q}\} \subseteq Supp(\tilde{E})$. نامساوی دوم، یعنی $d \leq g-1$، نتیجه‌ی مستقیم این نکته است.

برای اثبات کامل بودن سری خطی g_d^1، فرض کنید به ازای بخش‌یابی مانند $D \in g_d^1$ داشته باشیم $g_d^1 \subseteq D$. توجه داریم که بخش‌یاب مثبتی مانند Γ وجود دارد به طوری‌که $\tilde{L} = \pi^*(D) + \Gamma$. با فرض غیرکامل بودن سری خطی g_d^1، تساوی‌های
$\tilde{Q} \cap \mathbb{P}^{g-2} = [\cup_{\tilde{D}\in\tilde{L}}\langle\tilde{D}\rangle] \cap \mathbb{P}^{g-2} = \mathbb{P}^{g-2}$
برقرار خواهند بود که با مخروط مماسی پایا بودن $\tilde{Q}$ در تناقض هستند. همچنین توجه داریم که با توجه به نامساوی $h^0(K_X - 2g_d^1) \geq 1$، کلاف خطی $T := K_X - 2g_d^1$ در تساوی ادعا شده در صورت قضیه صدق می‌کند. در حالت $d = g-1$ قضیه‌ی ۳-۲ دارای عکسی به شکل زیر است:

۳-۳ قضیه. فرض کنید $Q \in \mathrm{I}_{X.2}(4)$ دارای این خاصیت باشد که یکی از خانواده‌های خط‌کشی کننده‌ی آن یک سری خطی کامل، g_{g-1}^1، روی خم X می‌بُرد به طوری‌که تساوی $۲\mathcal{O}(g_{g-1}^1) = K_X$ برقرار است. با این مفروضات Q یک مخروط مماسی از $\mathbb{E}(\pi)$ خواهد بود.

برهان. با قرار دادن $\tilde{L}:=\pi^*(g_{g-1}^1)$ از تساوی $۲\mathcal{O}(g_{g-1}^1) = K_X$ نتیجه می‌شود $\tilde{L} \in \mathbb{E}(\pi)$. همچنین توجه داریم که
$.h^0(\tilde{L}) = h^0(g_{g-1}^1) + h^0(g_{g-1}^1.\eta)$
از ابررویه بودن Q در $\mathbb{P}^{g-2}$، نتیجه می‌شود که هر کدام از فضاهای خط‌کشی کننده‌ی Q یک $\mathbb{P}^{g-4}$ داخل $\mathbb{P}^{g-2}$ است. لذا با استفاده از قضیه‌ی ریمان - رخ هندسی معلوم می‌شود که $h^0(g_{g-1}^1.\eta) = 2$. از این تساوی نتیجه می‌شود $h^0(\tilde{L}) = 4$، که به نوبه‌ی خود تعلق $\tilde{L} \in Sing_2\mathbb{E}(\pi)$ را ایجاب می‌کند.
با استفاده از قضیه‌ی (1.14)، به ازای هر فضای خطی مانند Λ در Q با شرط $\Lambda=\langle D\rangle$، با قرار دادن $\tilde{\Lambda} = \langle\pi^*(D)\rangle$ خواهیم داشت: $\tilde{\Lambda} \cap \mathbb{P}^{g-2} = \Lambda$. لذا با استفاده‌ی مجدد از قضیه‌ی (1.14)، تساوی $\tilde{Q} \cap \mathbb{P}^{g-2} = Q$ نتیجه می‌شود که اثبات را کامل می‌کند.

٤. مثالی از خم‌های متعارف – پریم با گونای 7 و گونالیتی 4

فرض کنید X خم مسطح هموار درجه‌ی دوم باشد به طوری‌که نقاط همخط $\bar{x}$، $\bar{y}$ و $\bar{z}$ تنها نقاط تکینگی گرهی برای X باشند. همچنین فرض کنید $i: C \to X$ نرمالسازی X باشد. با استفاده از فرمول درجه-گونا بدست می‌آوریم: $g(C) = 7$.
با فرض $i^{-1}(\bar{x}) = \{x_1.\ x_2\}$،$i^{-1}(\bar{y}) = \{y_1, y_2\}$ و $i^{-1}(\bar{z}) = \{z_1.\ z_2\}$، و همچنین با قراردادن $H = i^*(O_X(1))$ و $\Delta= x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2$
سری خطی $5H - \Delta$ را روی خم C و نیز بخش‌یاب $D_{12} \in C_{12}$ را طوری در نظر می‌گیریم که داشته باشیم $۲D_{12} \in ۵H - \Delta$. با این فرض‌ها قرار می‌دهیم $. = ۲H - D_{12}$. بدیهی است که$K_C = ۳H - \Delta$.
همچنین با استفاده از هم‌خط بودن نقاط $\bar{x}$، $\bar{y}$ و $\bar{z}$ معلوم می‌شود که $0 = ^۲$. خم C خمی هموار و 4-گونال است. در واقع پس‌کشی خطوط گذرنده از هرکدام از نقاط $\bar{x}$، $\bar{y}$ یا $\bar{z}$ یک g_4^1 روی C تولید می‌کنند. با استفاده از قضیه‌ی مارتنس[5] - مامفرد[6] معلوم می‌شود $dim(W_6^1(C)) \leq ۲$. دو نوع سری خطی g_6^1 روی خم C وجود دارند. نوع اول، از خطوط واقع در $\mathbb{P}^۲$ حاصل می‌شوند. همچنین به ازای نقاط عمومی p و q خم‌های مسطح مربعی گذرنده از p و q و نیز گذرنده از ۲ نقطه از سه نقطه ی $\bar{x}$، $\bar{y}$ و $\bar{z}$ سری خطی g_6^1 روی خم C ایجاد می‌کنند. به عبارت دیگر
$.g_6^1 = 2H - x_1 - x_2 - y_1 - y_2 - p - q$
این سری‌ها نوع دوم سری‌های خطی g_6^1 را روی خم C ایجاد می‌کنند. می‌توان دید که هر سری خطی g_6^1 وی C به یکی از این دو شکل بدست می‌آید.

---
[5] Martens
[6] Mumford

براساس قضیه‌ای از فرانچسکو سوری[۷]، وجود خم‌های تحویل ناپذیر از درجه‌ی d با تعداد مشخصی، δ، تکینگی معمولی در بازه‌ای مشخص از d و δ، ثابت می‌شود. مراجعه شود به [7]. از طرف دیگر این قضیه در مورد وجود چنین خم‌هایی، که حداقل سه تا از تکینگی‌های آنها هم‌خط باشند، پاسخی نمی‌دهد. لذا ثابت می‌کنیم که گردایه‌ی خم‌های تحویل ناپذیر از درجه‌ی 6 که دارای 3 نقطه‌ی تکینگی هم‌خط باشند، مجموعه‌ای ناتهی است. به عبارت دیگر ثابت می‌کنیم:

۱– ٤ قضیه. خم تحویل‌ناپذیری مانند X از درجه‌ی 6 با سه نقطه‌ی تکینگی هم‌خط در $\mathbb{P}^2$ وجود دارد به طوری‌که خم نرمال شده‌ی آن، C، دارای بخش‌یابی مانند D_{12} است به طوری‌که $2D_{12} \in |5H - \Delta|$. همچنین با نمادهای فوق، کلاف خطی $\mathrm{K_X}$. یک کلاف خطی پردامنه است.

برهان. فرض کنید Q_1 و Q_2 خم‌های مربعی و مسطح باشند به طوریکه فقط در یک نقطه‌ی t برهم مماس باشند. طبق قضیه‌ی بزو[۸]، این خم‌ها در دو نقطه‌ی دیگر مانند $\bar{x}$ و $\bar{y}$ با چندگانگی 1 همدیگر را قطع خواهند کرد. فرض کنید $l_{\bar{x}.\bar{y}}$ خط گذرنده از این دو نقطه باشد. به ازای هر نقطه مانند $\bar{z}$ از $l_{\bar{x}.\bar{y}}$ خطوطی مانند L_1 و L_2 مار بر $\bar{z}$ موجودند به طوری‌که L_1 بر Q_1 و L_2 بر Q_2 مماس هستند. حال خم تحویل‌پذیر X_1 با تعریف $h = Q_1.Q_2.L_1.L_2$ خمی از درجه 6 بوده و دارای تعداد 3 تا نقطه‌ی تکینگی معمولی و هم‌خط است. فرض کنید Q فضای خم‌های مربعی مسطح مار بر نقاط $\bar{x}$ $\bar{y}$ و t باشد و همچنین فرض کنید Q_1 فضای خم‌هایی از Q باشد که در نقطه‌ی t بر هم مماس هستند. در این صورت $dim(\boldsymbol{Q_1}) \geq 1$. با انتخاب یک جفت دیگر از خم‌های مربعی مانند $\bar{Q}_1.\bar{Q}_2$ از Q_1 که مجزا از Q_1 و Q_2 هستند و نیز با انتخاب خطوط $\bar{L}_1.\bar{L}_2$ مشابه با انتخاب خطوط L_1 و L_2 و متمایز از آنها، قرار می‌دهیم:

$k = \bar{Q}_1.\bar{Q}_2.\bar{L}_1.\bar{L}_2$. مشابه با خم X_1، خم تعریف شده توسط چند جمله‌ای k، که آن را با X_2 نشان می‌دهیم، خمی مسطح، تحویل پذیر و از درجه‌ی 6 است که نقاط هم‌خط $\bar{x}$، $\bar{y}$ و $\bar{z}$ نقاط تکینگی معمولی آن هستند. همچنین توجه داریم که خمهای X_1 و X_2 دارای هیچ مولفه‌ی مشترک نیستند. حال با استفاده از قضیه‌ی برتینی[۹] معلوم می‌شود که عضو عمومی سری خطی $|\lambda X_1 + \mu X_2|$ خمی مسطح، تحویل‌ناپذیر و از درجه‌ی 6 است که نقاط هم خط $\bar{x}$، $\bar{y}$ و $\bar{z}$ نقاط تکینگی معمولی آن هستند.

در ادامه، اگر X عضوی عمومی از سری خطی $|\lambda X_1 + \mu X_2|$ باشد، ثابت می‌کنیم که بخش‌یابی مانند $D_{12} \in X^{12}$ موجود است به طوری‌که:

$$2D_{12} \in 5H - \Delta$$

بدین منظور نقاط p_1، p_2 و p_3 را متمایز از نقاط $\bar{x}$، $\bar{y}$ و $\bar{z}$ در نظر گرفته و فرض کنید T خمی مسطح ازدرجه‌ی ۵ باشد که نقاط p_1، p_2 و p_3، نقاط تکینگی معمولی آن هستند. همچنین فرض کنید T مار بر نقاط $\bar{x}$، $\bar{y}$ و $\bar{z}$ بوده و نقاط در وضعیت عمومی $p_4.\dots.p_{12}$ راروی T در نظر بگیرید. وجود خم T، با خواص مطلوب در پاراگراف قبل، به راحتی با استفاده از شمارشی ساده در مورد خم‌های درجه‌ی 5 واقع در $\mathbb{P}^2$ نتیجه خواهد شد.

توجه داریم که خمی مسطح و از درجه‌ی 6 مانند F موجود است که از نقاط $p_1.p_2.\dots.p_{12}$ گذشته و در نقاط $p_4.\dots.p_{12}$ بر خم T مماس است. برای ارائه اثباتی از این واقعیت، اولا متذکر می‌شویم که فضای خم‌های مسطح و از درجه‌ی 6 فضایی 27 بعدی است. از طرف دیگر مارّ بودن بر نقاط $p_1.p_2.\dots.p_{12}$ و مماس بودن در نقاط $p_4.\dots.p_{12}$ و نیز داشتن سه نقطه‌ی تکینگی هم‌خط $\bar{x}$، $\bar{y}$ و $\bar{z}$ حداکثر 24 شرط روی خم‌های مسطح و از درجه‌ی 6 تحمیل خواهد کرد. این ملاحظه وجود خم مطلوب F را به اثبات می‌رساند.

[7] Francesco Severi
[8] Bezout
[9] Bertini

با نمادهای پاراگراف قبل، بدیهی است که بخش‌یاب $D_{12} := p_1 + \ldots + p_{12}$ بخشیابی است که دارای خواص مطلوب قضیه است.

۲-٤ لم. با نمادهای فوق فرض کنید g_6^1 سری خطی از نوع دوم باشد. دراین صورت $h^0(K_C. - g_6^1) \leq 3$.

برهان. با یک محاسبه سرراست به سادگی معلوم می‌شود که $K_C. - g_6^1 \sim 3H - D_{12} + p + q - z_1 - z_2$.

با استفاده از "در وضعیت عمومی بودن" نقاط p و q معلوم می‌شود:

$$h^0(3H - D_{12} + p + q - z_1 - z_2) = h^0(3H - D_{12} - z_1 - z_2) \leq h^0(3H - D_{12}).$$

همچنین با استفاده از متناهی بودن درجه‌ی نگاشت جمعی $3H - D_{12} \times 3H - D_{12} \to 6H - 2D_{12}$ با ضابطه‌ی $(D_1, D_2) \mapsto D_1 + D_2$ معلوم می‌شود که

$2h^0(3H - D_{12}) - 2 \leq h^0(6H - 2D_{12}) - 1$.

با استفاده از فرض متعلق بودن بخش‌یاب $۲D_{12}$ به سری خطی $۵H - \Delta$ و هم ارز خطی بودن Δ با H معلوم می‌شود $h^0(6H - 2D_{12}) = 6$. این تساوی اثبات حکم را تکمیل می‌کند.

۳-٤ قضیه. با نمادهای فوق، فرض کنید g_6^1 سری خطی از نوع دوم و نیم - متعارف بوده و داشته باشیم: $۲z_1 + ۲z_2 \sim ۲p + ۲q$.

همچنین فرض کنید z_1 نقطه‌ای ثابت از سری خطی $۳H - D_{12}$ بوده ولی z_2 نقطه‌ای ثابت از این سری خطی نباشد. آنگاه، درصورت برقراری تساوی $h^0\left(۳H - D_{12}\right) = ۳$، واریته‌ی $\mathrm{Q} = \bigcup_{\mathrm{D} \in g_6^1} \langle \mathrm{D} \rangle$ یک مخروط مماسی از $\mathbb{E}(\pi)$ در $\mathbb{P}^۵$ خواهد بود.

برهان. با استفاده از شکل هندسی قضیه‌ی ریمان - رخ و تساوی‌های

$$h^0(K_C. - g_6^1) = h^0(3H - D_{12} - z_1 - z_2) = h^0(3H - D_{12} - z_2) - 1 = 2$$

نتیجه می‌شود که به ازای هر $D \in g_6^1$ داریم $dim(\langle D \rangle) = ۳$، که از آن نتیجه می‌شود

$$dim(Q) = dim\left(\bigcup_{D \in g_6^1} \langle D \rangle\right) = 4$$

و $rank(Q) \leq 4$، $deg(Q) = ۲$. بنابراین Q ابررویه‌ی مربعی است. تساوی $۲\mathcal{O}(g_6^1) = K_X$ نتیجه‌ای مستقیم از نیم - متعارف بودن سری g_6^1 است. حال مماس مخروطی بودن Q به وضوح از قضیه‌ی ۳.۳ نتیجه خواهد شد.

فهرست منابع

[1] E Arbarello, M Cornalba, Ph. Griffiths, J Harris, (1985). Geometry of Algebraic Curves, I Grundlehren .

[2] E Arbarello, J Harris, (1981). Canonical Curves and Quadrics of rank 4, Compositio mathematica.

[3] Ch Birkenhake, H Lange, (2004). Complex Abelian Varieties (Seconed Edition), I Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.

[4] L Gruson, R Lazarsfeld, C Peskine, (1983). On a Theorem of Castelnouvo and the equations defining Space Curves, Invent. Math.

[5] R Hartshorne, (1977). Algebraic Geometry, Springer Verlag.

[6] H Lange, E Sernesi, (1996). Quadrics containing a Prym-Canonical Curve, J. Algebraic Geometry.

[7] S.C Martin, (2009). Singularities of the Prym theta divisor, Annales of Mathematics.

[8] E Sernesi(2006). Deformations of Algebraic Curves, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.

[9] R Smith, R Varley, (2001). A Riemann Singularities Theorem for Prym Theta Divisors, with applications, Pacific Journal of Mathematics.

[10] R Smith, R Varley, (2001). The Curve of "Prym Canonical" Gauss Divisors on a Prym Theta Divisor, Transactions of the A.M.S.V.