

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال سوم، شماره یازدهم، پاییز ۱۳۹۶

شماره شاپا: ۱۶۹-۰۱۶۸۲

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

بعدهای همولوژیکی گرنشتاین نسبت به یک مدول شبه دوگانی روی حلقه گروه‌ها

عبدالناصر بهلکه *

استادیار، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۲/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۵/۰۲

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و نوتری و Γ یک گروه متناهی باشد. در این مقاله، ما بعدهای همولوژیکی گرنشتاین مدول‌ها نسبت به یک مدول شبه دوگانی روی حلقه گروه $R\Gamma$ را مطالعه می‌کنیم. نشان داده خواهد شد که بعدهای همولوژیکی گرنشتاین $R\Gamma$ -مدول M نسبت به مدول شبه دوگانی روی R و $R\Gamma$ با هم برابر می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: مدول شبه دوگانی، بعد گرنشتاین، بعد C -تصویری گرنشتاین، بعد C -تزریقی گرنشتاین.

۱. مقدمه

در حدود نیم قرن پیش، اسلاندر^۱، باکسبام^۲ [۳] و سر [۱۴] حلقه‌های موضعی منظم را توسط بعد تصویری رده‌بندی کرده‌اند. آن‌ها ثابت کرده‌اند که حلقه جابجایی نوتری و موضعی R منظم است اگر و تنها اگر بعد تصویری هر R -مدول متناهی مولد M متناهی باشد. از آن زمان، مسأله مشخص‌سازی حلقه‌های جابجایی براساس بعدها همولوژیکی، یکی از جالب‌ترین موضوعات در جبر جابجایی بوده است. به منظور رده‌بندی حلقه‌های گرنشتاین، اسلاندر و بریدگر^۳ در [۲] مفهوم بعد گرنشتاین (که آن را G -بعد نیز گویند) را برای مدول‌های متناهی مولد روی حلقه‌های نوتری معرفی و مطالعه کرده‌اند. آن‌ها نشان داده‌اند که حلقه‌ی موضعی R گرنشتاین است اگر و تنها اگر G -بعد هر مدول متناهی مولد، متناهی باشد.

مفهوم G -بعد، که تعمیم بعد تصویری می‌باشد، توسط ایناکس^۴ و جندا^۵ در [۶] برای هر مدول (نه لزوماً متناهی مولد) تعریف شد و آن‌ها این پایا را بعد تصویری گرنشتاین نامیده‌اند. ثابت شده است که حلقه موضعی R گرنشتاین است اگر و تنها اگر بعد تصویری گرنشتاین هر مدول (متناهی مولد)، متناهی باشد. ایناکس و جندا به‌طور دوگانی مفهوم بعد تزریقی گرنشتاین را تعریف کرده‌اند. همچنین، به منظور تکمیل مشابهت با بعدها کلاسیک، ایناکس و همکارانش در [۷] بعد یکدست گرنشتاین مدول‌ها را معرفی و مطالعه کرده‌اند.

مدول‌های شبه دوگانی^۶ روی حلقه‌های جابجایی و نوتری اولین بار توسط فاکسی^۷ [۹]، گلد^۸ [۱۱] و واسکنسلوس^۹ [۱۵] به‌طور مستقل از هم، تعریف و مطالعه شده است. R -مدول متناهی مولد C را شبه دوگانی گویند هرگاه همریختی طبیعی

$R \rightarrow \text{Hom}_R(C, C)$ یکرختی باشد و به‌علاوه برای

هر $i > 0$ ، $\text{Ext}_R^i(C, C) = 0$. مدول‌های شبه دوگانی که تعمیم مدول‌های آزاد از پایه یک می‌باشند، توسط هلم^{۱۰} و وایت^{۱۱} [۱۳] روی حلقه‌های شرکت‌پذیر دلخواه تعریف شده‌اند. افراد زیادی خاصیت‌های مدول‌های شبه دوگانی را از جنبه‌های مختلف مورد مطالعه قرار داده‌اند، به عنوان مثال به [۱۸، ۱۳، ۱۶] رجوع کنید. یکی از مهم‌ترین زمینه‌های تحقیقاتی در این مورد، مطالعه بعدها گرنشتاین مدول‌ها نسبت به یک مدول شبه دوگانی می‌باشد. در این راستا گلد در [۱۱] با استفاده از مدول شبه دوگانی C ، پایایی را برای هر مدول متناهی مولد نسبت داد. او این پایا را که نظریه‌ی از بعد تصویری می‌باشد، G_C -بعد نامید. به کمک این پایا، گرکو^{۱۲} در [۱۰] توصیفی برای حلقه‌های کوهن-مکالی ارائه کرد. با ایده گرفتن از مفهوم بعد تصویری گرنشتاین، هلم و یورگنسن^{۱۳} در [۱۲] G_C -بعد را برای هر مدول دلخواه روی حلقه نوتری و جابجایی تعریف کرده و آن‌ها این پایا را بعد C -تصویری گرنشتاین نامیده‌اند. وایت در [۱۵] بعد C -تصویری گرنشتاین^{۱۴} را روی حلقه‌های جابجایی که لزوماً نوتری نمی‌باشند، تعریف کرده است. فرض کنید R یک حلقه نوتری و جابجایی و M یک R -مدول دلخواه باشد. گوییم M ، C -تصویری گرنشتاین است اگر برای هر $i > 0$ و هر R -مدول تصویری P ، $\text{Ext}_R^i(M, C \otimes_R P) = 0$ و همبافت دقیق از $-R$ مدول‌های

$$0 \rightarrow M \rightarrow C \otimes_R P_{-1} \rightarrow C \otimes_R P_{-2} \rightarrow \dots$$

که در آن P_i ها تصویری بوده، موجود باشند به‌طوری‌که تابعگون $\text{Hom}_R(-, C \otimes_R P)$ برای هر R -مدول تصویری P ، این همبافت را دقیق نگه دارد.

هلم و یورگنسن هم‌چنین مفهوم بعدها C -تزریقی گرنشتاین^{۱۵} و C -یکدست گرنشتاین^{۱۶} را معرفی و مطالعه

1. Auslander
2. Buchsbaum
3. Bridger
4. Enochs
5. Jenda
6. Semi-dualizing
7. Foxby
8. Golod
9. Vasconcelos

10. Holm
11. White
12. Gerko
13. Jørgensen
14. C-Gorenstein projective
15. C-Gorenstein injective
16. C-Gorenstein flat

تعریف ۲: فرض کنیم C یک Λ -مدول شبه دوگانی بوده و M یک Λ -مدول باشد. گوییم M - C تصویری گرنشتاین است، اگر شرایط زیر فراهم باشد.

(i) برای هر $i > 0$ و هر Λ -مدول تصویری P ، $\text{Ext}_{\Lambda}^i(C, C \otimes_{\Lambda} P) = 0$.

(ii) همبافت دقیق از Λ -مدولهای $\mathbf{X}: 0 \rightarrow M \rightarrow C \otimes_{\Lambda} P_{-1} \rightarrow C \otimes_{\Lambda} P_{-2} \rightarrow \dots$ موجود باشد که در آن P_i ها تصویری بوده و تابعگون $\text{Hom}_{\Lambda}(-, C \otimes_{\Lambda} Q)$ ، که در آن Q یک Λ -مدول تصویری می باشد، همبافت \mathbf{X} را دقیق نگه می دارد.

تذکره ۳: با توجه به تعریف بالا، واضح است که M, C - Λ تصویری گرنشتاین است اگر و تنها اگر همبافت دقیق از Λ -مدولهای

$$\dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow C \otimes_{\Lambda} P_{-1} \rightarrow C \otimes_{\Lambda} P_{-2} \rightarrow \dots$$

موجود است که در آن برای هر i ، P_i تصویری بوده و $M = \text{coker}(P_1 \rightarrow P_0)$ به علاوه تابعگون

$\text{Hom}_{\Lambda}(-, C \otimes_{\Lambda} Q)$ برای هر Λ -مدول تصویری Q ، همبافت بالا را دقیق نگه می دارد. (گزاره ۲، ۲ از [۱۷] را ملاحظه کنید.)

تعریف ۴: Λ -مدول M را C -تزیقی گرنشتاین گوییم هرگاه

(۱) برای هر $i \geq 1$ و هر Λ -مدول تزیقی I ، $\text{Ext}_{\Lambda}^i(\text{Hom}_{\Lambda}(-, I), M) = 0$.

(۲) همبافت دقیق از Λ -مدولهای $\dots \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(C, I_1) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(C, I_0) \rightarrow M \rightarrow 0$

موجود باشد به طوری که I_i ها تزیقی بوده و تابعگون $\text{Hom}_{\Lambda}(\text{Hom}_{\Lambda}(C, E), -)$ برای هر Λ -مدول تزیقی E ، این همبافت را دقیق نگه می دارد. (به تعریف ۲، ۲ از [۱۷] مراجعه شود.)

مثال ۵: فرض کنیم I (به ترتیب، P) یک Λ -مدول تزیقی (به ترتیب، تصویری) باشد. در این صورت Λ -مدولهای I و $\text{Hom}_{\Lambda}(C, I)$ (به ترتیب، P و $C \otimes_{\Lambda} P$ -تزیقی گرنشتاین (به ترتیب، C -تصویری گرنشتاین) می باشد. (به مثال ۸، ۲ از [۱۷] مراجعه شود.)

کرده اند. آن ها نشان داده اند که این پایاها با بعدهای ایناکس و همکارانش روی حلقه های توسیع بدیهی $C \propto R$ یکی می باشند. (به قضیه ۱۶، ۲ از [۱۲] رجوع شود.)

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و نوتری و Γ یک گروه متناهی باشد. یکی از موضوع های مهم در کوهمولوژی گروه ها، انتقال خاصیت های همولوژیکی مدول از R به حلقه گروه $R\Gamma$ می باشد. با در نظر گرفتن این مطلب و اهمیت پایاها بیان شده، هدف ما در این مقاله، مطالعه بعدهای همولوژیکی گرنشتاین نسبت به یک مدول شبه دوگانی روی حلقه گروه $R\Gamma$ می باشد. قضیه اصلی این مقاله ثابت می کند که بعد $R\Gamma \otimes_R C$ -تصویری گرنشتاین $R\Gamma$ -مدول M برابر صفر است اگر و تنها اگر بعد C -تصویری گرنشتاین M به عنوان R -مدول برابر صفر باشد. به علاوه ثابت می شود که مشابه این قضیه برای بعد C -یکدست گرنشتاین قوی نیز برقرار می باشد.

در طول این مقاله، R یک حلقه جابجایی و نوتری بوده و Γ یک گروه متناهی می باشد. به علاوه همه مدول ها، چپ مدول در نظر گرفته می شوند.

۲. تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل برخی تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل بعد استفاده خواهد شد را بیان می کنیم. ما این فصل را با تعریف مدول شبه دوگان روی R -جبر نوتری شروع می کنیم.

تعریف ۱: فرض کنیم Λ یک R -جبر نوتری و C یک Λ -مدول متناهی مولد باشد. گوییم C شبه دوگانی است اگر

(i) همریختی های طبیعی $\text{Hom}_{\Lambda}^{\text{op}}(C, C) \rightarrow \Lambda$ و $\text{Hom}_{\Lambda}(C, C) \rightarrow \Lambda^{\text{op}}$ یکرختی باشند، که در آن Λ^{op} حلقه متضاد Λ می باشد.

(ii) برای هر $i > 0$ ، $\text{Ext}_{\Lambda}^i(C, C) = 0 = \text{Ext}_{\Lambda^{\text{op}}}^i(C, C)$.

چون هر مدول تصویری، یکدست است، هر Λ -مدول C -یکدست گرنشتاین قوی، C -تصویری گرنشتاین می‌باشد. شایان ذکر است که تاکنون مثالی از یک مدول C -تصویری گرنشتاین که C -یکدست گرنشتاین قوی نباشد، ارائه نشده است.

در ادامه برخی نتایج مقدماتی روی حلقه گروه‌ها را بیان می‌کنیم.

تذکره ۹: فرض کنیم Γ یک گروه متناهی و $R\Gamma$ حلقه یکرخت می‌باشد. هر $R\Gamma$ -مدول چپ، یک $R\Gamma$ -مدول راست نیز می‌باشد و برعکس.

تبصره ۱۰: فرض کنیم M یک R -مدول باشد. در این صورت بنا به گزاره ۹،۵ از [۵]، یکرختی از $R\Gamma - R\Gamma$ مدول‌های $R\Gamma \otimes_R M \cong \text{Hom}_R(R\Gamma, M)$ برقرار می‌باشد. توجه شود که چون $R\Gamma$ یک $R\Gamma - R$ دو مدول می‌باشد، $R\Gamma \otimes_R M$ یک $R\Gamma$ -مدول (چپ) می‌باشد. به علاوه چون $R\Gamma$ یک $R\Gamma - R$ دو مدول می‌باشد، $\text{Hom}_R(R\Gamma, M)$ یک $R\Gamma$ -مدول (چپ) می‌باشد.

گزاره ۱۱: فرض کنیم C یک R -مدول شبه دوگانی باشد. در این صورت $R\Gamma \otimes_R C$ یک $R\Gamma - R$ دو مدول شبه دوگانی می‌باشد. برهان: به گزاره ۲،۳ از [۵] رجوع شود.

۳. قضایای اصلی

در این فصل ما بعدهای تعریف شده در فصل قبل را روی حلقه گروه‌ها مطالعه می‌کنیم. در طول این فصل، همواره C یک مدول شبه دوگانی برای R بوده و Γ گروهی متناهی می‌باشد.

گزاره ۱۲: فرض کنیم M یک R -مدول C -تزیقی گرنشتاین باشد. در این صورت $\text{Hom}_R(R\Gamma, M)$ یک $R\Gamma$ -مدول $R\Gamma \otimes_R C$ -تزیقی گرنشتاین می‌باشد.

برهان: چون M یک R -مدول C -تزیقی گرنشتاین می‌باشد، بنابر تعریف همبافت دقیق از R -مدول‌های

$$\text{Hom}_R(C, \mathbf{I}): \cdots \rightarrow \text{Hom}_R(C, I_1) \rightarrow \text{Hom}_R(C, I_0) \rightarrow M \rightarrow 0$$

تبصره ۶: در قضیه ۸،۲ از [۱۷] ثابت شده است که رده مدول‌های C -تصویری گرنشتاین به‌طور تصویری، تحلیلی می‌باشند. یعنی اگر $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow 0 \rightarrow M''$ یک رشته دقیق از Λ -مدول‌ها باشد به‌طوری که M'' C -تصویری گرنشتاین باشد، آنگاه M C -تصویری گرنشتاین است اگر و تنها اگر M' C -تصویری گرنشتاین باشد. به‌طور دوگان، می‌توان نشان داد که رده مدول‌های C -تزیقی گرنشتاین به‌طور تزیقی تحلیلی می‌باشند.

تعریف ۷: فرض کنیم M یک Λ -مدول و n یک عدد طبیعی نامنفی باشد. گوییم بعد C -تصویری گرنشتاین M کمتر یا مساوی n است و می‌نویسیم $n \geq \text{Gpd}_\Lambda M - C$ ، اگر یک رشته دقیق از Λ -مدول‌ها به صورت

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

موجود باشد که در آن برای هر $0 \leq i \leq n$ ، $G_i - C$ تصویری گرنشتاین می‌باشد. اگر n کوچکترین عدد با این خاصیت باشد، آنگاه می‌نویسیم $n = \text{Gpd}_\Lambda M - C$. اگر چنین n ای موجود نباشد، آنگاه می‌نویسیم $\infty = \text{Gpd}_\Lambda M - C$. به‌طور قرار داد، تعریف می‌کنیم $-\infty = \text{Gpd}_\Lambda 0 - C$.

بعد C -تزیقی گرنشتاین M که با نماد $\text{Gid}_\Lambda M - C$ نمایش داده می‌شود، به صورت دوگان تعریف می‌شود. توجه شود که اگر $C = \Lambda$ ، آنگاه بعدهای C -تصویری گرنشتاین و C -تزیقی گرنشتاین همان بعدهای تصویری گرنشتاین و تزیقی گرنشتاین اینکس و جندا می‌باشند.

تعریف ۸: فرض کنیم C یک Λ -مدول شبه دوگانی و M یک Λ -مدول باشد. گوییم M C -یکدست گرنشتاین قوی است، اگر

$$\text{Ext}_\Lambda^i(M, C \otimes_\Lambda F) = 0$$

برای هر Λ -مدول یکدست F و هر $i > 0$.

(ii) همبافت دقیق از Λ -مدول‌های $0 \rightarrow M \rightarrow C \otimes_\Lambda P_{-1} \rightarrow C \otimes_\Lambda P_{-2} \rightarrow \cdots$ موجود باشد به‌طوری که برای هر i ، P_i تصویری بوده و تابعگون $\text{Hom}_\Lambda(-, C \otimes_\Lambda F')$ که در آن F' یک Λ -مدول یکدست است، این همبافت را دقیق نگه دارد.

که در آن $ER\Gamma$ -مدول تزریقی است. بنا به فرض برای هر $i > 0$ $\text{Ext}_R^i(\text{Hom}_R(C, E), M) = 0$ خواهیم داشت:

$$\text{Ext}_{R\Gamma}^i(\text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, E), \text{Hom}_R(R\Gamma, M)) = 0$$

برای هر $i > 0$. لذا حکم حاصل می‌شود.

قضیه ۱۳: فرض کنیم M یک $R\Gamma \otimes_R C$ -تزریقی گرنشتاین باشد. در این صورت M به عنوان R -مدول C -تزریقی گرنشتاین می‌باشد.

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم:

$$\text{Ext}_R^i(\text{Hom}_R(C, I), M) = 0$$

برای هر $i > 0$ و هر R -مدول تزریقی I . چون I یک $R\Gamma$ -مدول تزریقی است، $\text{Hom}_R(R\Gamma, I)$ یک $R\Gamma$ -مدول تزریقی می‌باشد. لذا بنا به فرض

$$\text{Ext}_{R\Gamma}^i(\text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, \text{Hom}_R(R\Gamma, I)), M) = 0$$

برای هر $i > 0$. یکرختی‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{R\Gamma}^i(\text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, \text{Hom}_R(R\Gamma, I)), M) &\cong \text{Ext}_{R\Gamma}^i(\text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, R\Gamma \otimes_R I), M) \\ &\cong \text{Ext}_R^i(R\Gamma \otimes_R \text{Hom}_R(C, I), M) \\ &\cong \text{Ext}_R^i(\text{Hom}_R(C, I), \text{Hom}_R(R\Gamma, M)) \\ &\cong \text{Ext}_R^i(\text{Hom}_R(C, I), M) = 0 \end{aligned}$$

توجه شود که یکرختی اول بنا به تبصره ۱۰ برقرار بوده و یکرختی دوم از یکدست باوفا بودن $R\Gamma$ به عنوان R -مدول نتیجه می‌شود. دومین یکرختی از قضیه الحاقی Hom و \otimes به دست می‌آید و یکرختی آخر به وضوح برقرار می‌باشد. اینک نشان می‌دهیم که یک همبافت دقیق از R -مدول‌ها به صورت

$$\cdots \rightarrow \text{Hom}_R(C, I_1) \rightarrow \text{Hom}_R(C, I_0) \rightarrow M \rightarrow 0$$

موجود است که در آن I_i ها، R -مدول‌های تزریقی می‌باشند. چون M یک $R\Gamma$ -مدول $R\Gamma \otimes_R C$ -تزریقی گرنشتاین می‌باشد، بنا به تعریف همبافت دقیق از $R\Gamma$ -مدول‌های

$$\begin{aligned} Y: \cdots \rightarrow \text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, I_1) \\ \rightarrow \text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, I_0) \\ \rightarrow M \rightarrow 0 \end{aligned}$$

موجود است که در آن I_i ها، $R\Gamma$ -مدول‌های تزریقی می‌باشند. بنا به قضیه الحاقی Hom و \otimes یکرختی‌های

موجود است به طوری که برای هر i ، I_i ها یک R -مدول تزریقی می‌باشد. چون $R\Gamma$ به عنوان R -مدول، آزاد می‌باشد، همبافت دقیق از $R\Gamma$ -مدول‌های زیر را داریم

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow R\Gamma \otimes_R \text{Hom}_R(C, I_1) \\ \rightarrow R\Gamma \otimes_R \text{Hom}_R(C, I_0) \\ \rightarrow R\Gamma \otimes_R M \rightarrow 0 \end{aligned}$$

با استفاده از این واقعیت که $R\Gamma$ به عنوان R -مدول صادق باوفا می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که این همبافت یکرخت با همبافت

$$\begin{aligned} X: \cdots \rightarrow \text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, R\Gamma \otimes_R I_1) \\ \rightarrow \text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, R\Gamma \otimes_R I_0) \\ \rightarrow R\Gamma \otimes_R M \cong \text{Hom}_R(R\Gamma, M) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

می‌باشد. از طرفی چون Γ گروهی متناهی است، بنا به تبصره ۱۰، $R\Gamma \otimes_R I_i \cong \text{Hom}_R(R\Gamma, I_i)$ یک $R\Gamma$ -مدول تزریقی می‌باشد. حال فرض کنیم E یک $R\Gamma$ -مدول تزریقی دلخواه باشد. نشان می‌دهیم تابعی $\text{Hom}_{R\Gamma}(\text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, E), -)$ را دقیق نگه می‌دارد. برای این منظور، یکرختی‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{R\Gamma}(\text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, E), R\Gamma \otimes_R \text{Hom}_R(C, \mathbf{I})) \\ \cong \text{Hom}_R(R\Gamma \otimes_R \text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, E), \text{Hom}_R(C, \mathbf{I})) \\ \cong \text{Hom}_R(\text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, E), \text{Hom}_R(C, \mathbf{I})) \\ \cong \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(C, \text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma, E)), \text{Hom}_R(C, \mathbf{I})) \\ \cong \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(C, E), \text{Hom}_R(C, \mathbf{I})) \end{aligned}$$

توجه شود که یکرختی اول بنا به قضیه الحاقی Hom و \otimes و تبصره ۱۰ نتیجه می‌شود. به علاوه یکرختی دوم به وضوح برقرار بوده و یکرختی سوم دوباره از قضیه الحاقی Hom و \otimes نتیجه می‌شود. چون E یک $R\Gamma$ -مدول تزریقی است، به عنوان R -مدول نیز تزریقی است. حال بنا به فرض، همبافت آخر دقیق بوده و لذا همبافت اول نیز چنین می‌باشد. اینک نشان می‌دهیم که برای $R\Gamma$ -مدول تزریقی E ،

$$\text{Ext}_{R\Gamma}^i(\text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, E), \text{Hom}_R(R\Gamma, M)) = 0$$

برای هر $i > 0$. برای این منظور، بنا به قضیه الحاقی Hom و \otimes یکرختی زیر را داریم. هم‌چنین با استفاده از قضیه الحاقی Hom و \otimes به آسانی یکرختی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^i(\text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, E), \text{Hom}_R(R\Gamma, M)) \\ \cong \text{Ext}_R^i(\text{Hom}_R(C, E), M) \end{aligned}$$

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم M یک R -مدول C -تصویری
گرنشتاین باشد. نشان می‌دهیم M یک R -مدول C -
تصویری گرنشتاین می‌باشد. رشته دقیق از $R\Gamma$ -
مدول‌های

$$\mathbf{X}: 0 \rightarrow M \rightarrow (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} P_{-1} \\ \rightarrow (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} P_{-2} \\ \rightarrow \dots$$

را در نظر بگیرید که در آن برای هر i ، P_i یک $R\Gamma$ -
مدول تصویری می‌باشد. چون R حلقه جابجایی می‌باشد،
یکریختی‌های زیر را داریم

$$(R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} P_i \cong (C \otimes_R R\Gamma) \otimes_{R\Gamma} P_i \\ \cong C \otimes_R P_i$$

P_i به عنوان R -مدول نیز تصویری می‌باشد، چون $R\Gamma$ ،
یک R -مدول آزاد می‌باشد. به ویژه همبافت \mathbf{X} با
همبافت

$$\mathbf{X}': 0 \rightarrow M \rightarrow C \otimes_R P_{-1} \rightarrow \\ C \otimes_R P_{-2} \rightarrow \dots$$

یکریخت می‌باشد. اینک فرض کنیم P یک R -مدول
تصویری باشد. در این صورت $R\Gamma \otimes_R P$ یک $R\Gamma$ -
مدول تصویری بوده و لذا بنا به فرض همبافت
 $\text{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} (R\Gamma \otimes_R P))$
دقیق می‌باشد. اینک یکریختی‌های زیر را در نظر
می‌گیریم.

$$\text{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} (R\Gamma \otimes_R P)) \\ \cong \text{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_R P) \\ \cong \text{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}, \text{Hom}_R(R\Gamma, C \otimes_R P)) \\ \cong \text{Hom}_R(R\Gamma \otimes_{R\Gamma} \mathbf{X}, C \otimes_R P) \\ \cong \text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_R P)$$

بنابراین همبافت $\text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_R P)$ دقیق
می‌باشد. حال چون همبافت \mathbf{X} روی حلقه R با \mathbf{X}'
یکریخت می‌باشد، همبافت $\text{Hom}_R(\mathbf{X}', C \otimes_R P)$
دقیق می‌باشد. حال نشان می‌دهیم که برای هر R -
مدول تصویری P ، $\text{Ext}_R^i(M, C \otimes_R P) = 0$ برای
هر $i > 0$ بنا به فرض داریم:

$$\text{Ext}_{R\Gamma}^i(M, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} (R\Gamma \otimes_R P)) = 0 \\ \text{برای هر } i > 0 \text{ لذا مشابه بالا، می‌توان دید} \\ \text{Ext}_R^i(M, C \otimes_R P) = 0 \text{ که برای هر } i > 0 \\ \text{بنابراین } M \text{ یک } R\text{-مدول } C\text{-تصویری گرنشتاین} \\ \text{می‌باشد.}$$

$$\text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, I_i) \\ \cong \text{Hom}_R(C, \text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma, I_i)) \\ \cong \text{Hom}_R(C, I_i)$$

برقرار می‌باشد. به علاوه به آسانی می‌توان دید که برای
هر $i, i \geq 0$ به عنوان R -مدول نیز تزریقی می‌باشد.
بنابراین همبافت دقیق زیر از R -مدول‌های

$$\mathbf{X}: \dots \rightarrow \\ \text{Hom}_R(C, I_2) \rightarrow \text{Hom}_R(C, I_1) \rightarrow \\ \text{Hom}_R(C, I_0) \rightarrow M \rightarrow 0$$

موجود است. در نتیجه M به عنوان R -مدول C -تزیقی
گرنشتاین می‌باشد. باید ثابت شود که برای هر R -مدول
تزیقی E ، تابعگون $\text{Hom}_R(\text{Hom}_R(C, E), -)$
همبافت \mathbf{X} را دقیق نگه می‌دارد. چون همبافت \mathbf{X} و
بر روی حلقه R یکریخت می‌باشند، کافی است نشان
دهیم که تابعگون $\text{Hom}_R(\text{Hom}_R(C, E), -)$
همبافت \mathbf{Y} را دقیق نگه می‌دارد. بنا به فرض همبافت

$$\text{Hom}_{R\Gamma}(\text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, R\Gamma \otimes_R E), Y) \\ \text{دقیق است. حال یکریختی‌های زیر را در نظر می‌گیریم:} \\ \text{Hom}_{R\Gamma}(\text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R C, R\Gamma \otimes_R E), Y) \\ \cong \text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R \text{Hom}_R(C, E), Y) \\ \cong \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(C, E), \text{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma, Y)) \\ \cong \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(C, E), Y) \\ \text{بنابراین } \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(C, E), Y) \text{ دقیق می‌باشد.} \\ \text{لذا حکم تمام است.}$$

تبصره ۱۴: فرض کنیم M یک R -مدول باشد. چون
 $R\Gamma$ به عنوان R -مدول صادق باوفا است، بنا به لم ۵،۲
از [۱۷]، M یک R -مدول C -تصویری گرنشتاین است
اگر و تنها اگر $R\Gamma \otimes_R M$ یک $R\Gamma$ -مدول $R\Gamma \otimes_R C$ -
تصویری گرنشتاین می‌باشد. به ویژه این مطلب نتیجه
می‌دهد که برای هر R -مدول M تساوی

$$C - \text{Gpd}_R M = (R\Gamma \otimes_R C) \\ - \text{Gpd}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R M)$$

برقرار می‌باشد.

اینک می‌خواهیم قضیه اصلی این مقاله را بیان و ثابت
کنیم.

قضیه ۱۵: فرض کنیم M یک $R\Gamma$ -مدول باشد. در
این صورت M ، $R\Gamma \otimes_R C$ -تصویری گرنشتاین است
اگر و تنها اگر M به عنوان R -مدول C -تصویری
گرنشتاین باشد.

گرفت. R -مدول آزاد Q را چنان اختیار می‌کنیم به طوری که $P \cong R\Gamma \otimes_R Q$. یکرختی‌های زیر را در نظر می‌گیریم؛

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} P) \\ & \cong \text{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} (R\Gamma \otimes_R Q)) \\ & \cong \text{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_R Q) \\ & \cong \text{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}, \text{Hom}_R(R\Gamma, C \otimes_R Q)) \\ & \cong \text{Hom}_R(R\Gamma \otimes_{R\Gamma} \mathbf{X}, C \otimes_R Q) \\ & \cong \text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_R Q) \end{aligned}$$

یکریختی سوم بنا به تبصره ۱۰ برقرار بوده و یکرختی چهارم از قضیه الحاقی Hom و \otimes حاصل می‌شود. چون هم‌هسته هر یک از همریختی‌های \mathbf{X} به عنوان R -مدول C -تصویری گرنشتاین می‌باشد، $\text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_R Q)$ دقیق بوده و لذا

$$\text{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} P)$$

دقیق می‌باشد. برای اتمام اثبات، باید نشان دهیم که برای $R\Gamma$ -مدول آزاد F ،

$$\text{Ext}_{R\Gamma}^i(M, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} F) = 0$$

برای هر $i > 0$. فرض کنیم F' یک R -مدول آزاد باشد به طوری که $F \cong R\Gamma \otimes_R F'$ از آنجا مشابه بالا یکرختی‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \text{Ext}_{R\Gamma}^i(M, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} (R\Gamma \otimes_R F')) \\ & \cong \text{Ext}_{R\Gamma}^i(M, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_R F') \\ & \cong \text{Ext}_R^i(R\Gamma \otimes_{R\Gamma} M, C \otimes_R F') \\ & \cong \text{Ext}_R^i(C \otimes_R F') \end{aligned}$$

چون M به عنوان R -مدول، C -تصویری گرنشتاین می‌باشد، برای هر $i > 0$ $\text{Ext}_R^i(M, C \otimes_R F') = 0$ و لذا $\text{Ext}_{R\Gamma}^i(M, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} F) = 0$ برای هر $i > 0$. بنابراین M یک $R\Gamma$ -مدول $C \otimes_R R\Gamma$ -تصویری گرنشتاین می‌باشد. لذا حکم حاصل می‌شود. به عنوان نتیجه مستقیم از قضیه بالا، مطلب زیر را بیان می‌کنیم.

نتیجه ۱۶: فرض کنیم M یک $R\Gamma$ -مدول باشد. در این صورت

$$C - \text{Gpd}_R M = (R\Gamma \otimes_R C) - \text{Gpd}_{R\Gamma} M.$$

در ادامه می‌خواهیم مشابه قضیه ۱۵ را برای رده مدول‌های C -یکدست گرنشتاین قوی بیان کنیم.

قضیه ۱۷: فرض کنیم M یک $R\Gamma$ -مدول باشد. در این صورت، M یک $R\Gamma \otimes_R C$ -یکدست گرنشتاین

برعکس: فرض کنیم M به عنوان R -مدول، C -تصویری گرنشتاین باشد. نشان می‌دهیم M یک $R\Gamma$ -مدول $R\Gamma \otimes_R C$ -تصویری گرنشتاین می‌باشد. چون M یک R -مدول C -تصویری گرنشتاین می‌باشد، بنا به گزاره ۹،۲ از [۱۷]، رشته دقیق از R -مدول‌های $0 \rightarrow M \rightarrow C \otimes_R Q_{-1} \rightarrow L \rightarrow 0$ که در آن L C -تصویری گرنشتاین و Q_{-1} تصویری می‌باشد. بنا به ملاحظه ۲،۳ از [۱۷]، Q_{-1} را می‌توان R -مدول آزاد فرض کرد. دیگرام جابجایی زیر از $R\Gamma$ -مدول‌ها با سطرهای دقیق را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M & \rightarrow & R\Gamma \otimes_R M & \rightarrow & L' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \theta & & \downarrow \varphi \\ 0 & \rightarrow & M & \rightarrow & R\Gamma \otimes_R (C \otimes_R Q_{-1}) & \rightarrow & L'' \rightarrow 0 \end{array}$$

بنا به لم مار، φ یک به یک بوده و $\text{coker} \varphi = R\Gamma \otimes_R L$. چون سطر بالا روی R شکافتنی می‌باشد، یکرختی $L' \cong \bigoplus_{i=1}^{t-1} M$ را داریم که در آن t مرتبه

گروه Γ می‌باشد. به ویژه L' یک R -مدول C -تصویری گرنشتاین می‌باشد. بنا به تبصره ۱۴، $\text{coker} \varphi$ یک $R\Gamma \otimes_R C$ -تصویری گرنشتاین بوده و در نتیجه بنا به قسمت اول به عنوان R -مدول C -تصویری گرنشتاین می‌باشد. لذا بنا به تبصره ۶ $R\Gamma$ -مدول L'' به عنوان R -مدول C -تصویری گرنشتاین می‌باشد. حال با تکرار این روند برای L'' به جای M و تکرار آن، همبافت دقیق از $R\Gamma$ مدول‌های

$$\begin{aligned} \mathbf{X}: 0 & \rightarrow M \rightarrow (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_R Q_{-1} \\ & \rightarrow (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_R Q_{-2} \\ & \rightarrow \dots \end{aligned}$$

به دست می‌آید که در آن برای هر i ، Q_i یک R -مدول آزاد بوده و هم‌هسته هر یک از همریختی‌ها، به عنوان R -مدول C -تصویری گرنشتاین است. به آسانی می‌توان دید که برای هر i ، یکرختی

$$(R\Gamma \otimes_R C) \otimes_R Q_i \cong (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} Q'_i$$

برقرار می‌باشد که در Q'_i یک $R\Gamma$ -مدول آزاد می‌باشد به طوری که $Q'_i \cong R\Gamma \otimes_R Q_i$. فرض کنیم P یک $R\Gamma$ -مدول تصویری باشد. نشان می‌دهیم $\text{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} P)$ دقیق می‌باشد. بنا به ملاحظه ۳،۲ از [۱۷]، می‌توان P را آزاد در نظر

ترتیب، C -یکدست) گوییم، اگر R -مدول تصویری (به ترتیب، یکدست) P موجود باشد به طوری که

$$M = C \otimes_R P$$

فرض کنیم C یک R -مدول دوگانی باشد. در این صورت بنا به گزاره ۲.۳ از [۴]، $R\Gamma \otimes_R C$ یک $R\Gamma -$ مدول دوگانی می‌باشد. بنابراین نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱۹: فرض کنیم C یک R -مدول دوگانی باشد. در این صورت رده $R\Gamma -$ مدول‌های $R\Gamma \otimes_R C -$ تصویری گرنشتاین و رده $R\Gamma -$ مدول‌های $R\Gamma \otimes_R C -$ یکدست گرنشتاین قوی، بر هم منطبق می‌باشند.

تبصره ۲۰: همان طوری که بیان شد، وایت نشان داده است که رده R -مدول‌های C -تصویری گرنشتاین، به طور تصویری تحلیلی می‌باشند. همان روش بیان می‌کند که رده مدول‌های C -یکدست گرنشتاین قوی نیز چنین می‌باشند. این مطلب و قضیه ۱۷ مطلب زیر را نتیجه می‌دهد.

نتیجه ۲۱: فرض کنیم M یک $R\Gamma -$ مدول باشد. در این صورت

$$(R\Gamma \otimes_R C) - \text{SGfd}_{R\Gamma} M = C - \text{SGfd}_R M.$$

سپاسگزاری

این پژوهش مستخرج از طرح تحقیقاتی به شماره ۶/۲۰۰۳ مصوب تاریخ ۹۵/۱۲/۰۸ دانشکده علوم پایه دانشگاه گنبد کاووس می‌باشد. لذا از مدیریت پژوهشی و فناوری دانشگاه برای تامین مالی قدردانی می‌کنیم.

قوی است اگر و تنها اگر M به عنوان R -مدول، $C -$ یکدست گرنشتاین قوی باشد.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم M یک $R\Gamma \otimes_R C -$ یکدست گرنشتاین قوی باشد. مشابه اثبات قضیه ۱۵ به آسانی می‌توان دید که M به عنوان R -مدول $C -$ یکدست گرنشتاین قوی می‌باشد. اینک فرض می‌کنیم $R\Gamma -$ مدول M به عنوان R -مدول، $C -$ یکدست گرنشتاین قوی باشد. به آسانی می‌توان دید که رده مدول‌های $C -$ یکدست گرنشتاین قوی به طور تصویری، تحلیلی می‌باشد. لذا مشابه اثبات قضیه ۱۵، می‌توان همبافت دقیق از $R\Gamma -$ مدول‌های

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow M \rightarrow (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} P_{-1} \\ \rightarrow (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} P_{-2} \\ \rightarrow \dots \end{aligned}$$

به دست آورد به طوری که هم‌هسته هم‌ریختی‌ها به عنوان R -مدول $C -$ یکدست گرنشتاین قوی می‌باشد. اینک فرض کنیم F یک $R\Gamma -$ مدول یکدست باشد. بنا به قضیه لازارد [۱۴]، یک دستگاه مستقیم $(Q_i)_{i \in I}$ از $R\Gamma -$ مدول‌های آزاد و متناهی مولد موجود است به طوری که $F \cong \lim_{i \in I} Q_i$. برای هر $i \in I$ ، $R -$ مدول آزاد و متناهی مولد Q'_i را چنان اختیار می‌کنیم به طوری که $Q_i \cong R\Gamma \otimes_R Q'_i$. قرار می‌دهیم $F' \cong \lim_{i \in I} Q'_i$. با استفاده دوباره از قضیه لازارد $F' \cong R\Gamma \otimes_R F'$ بوده و $R -$ مدول یکدست بوده و اینک استدلال به کار رفته در اثبات قضیه ۱۵، نشان می‌دهد که M یک $R\Gamma -$ مدول $R\Gamma \otimes_R C -$ یکدست گرنشتاین قوی می‌باشد.

تذکره ۱۸: همان طوری که بیان شد، هر $R -$ مدول $C -$ یکدست گرنشتاین قوی، $C -$ تصویری گرنشتاین می‌باشد. حال فرض کنیم C مدول دوگانی باشد (یعنی $\text{id}_R C < \infty$). در این صورت بنا به قضیه ۸.۲.۴ از [۱۸]، بعد تصویری هر $R -$ مدول یکدست، متناهی می‌باشد. بنابراین بعد $C -$ تصویری هر $R -$ مدول $C -$ یکدست، متناهی می‌باشد. لذا در این حالت هر مدول $C -$ تصویری گرنشتاین، $C -$ یکدست گرنشتاین قوی می‌باشد. یادآوری می‌شود که $R -$ مدول M را $C -$ تصویری (به

translation in Sb. Mat. **192** (2001), no. 6, 2517-2552.

فهرست منابع

- [11] Golod, S.E. (1984). *G-dimension and generalized perfect ideals*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **165**, 62-66 (Russian). Algebraic geometry and its applications.
- [12] Holm, H. and Jørgensen P. (2006). *Semi-dualizing modules and related Gorenstein homological dimensions*, J. Pure Appl. Algebra **205**, 423-445.
- [13] Holm, H. and White D. (2007). *Foxby equivalences over associative rings*, J. Math. Kyoto Univ. **47**, 781-808.
- [14] Lazard, D. (1969). *Autour de la paltitude*, Bull. Soc. Math. France. **97**, 81-128.
- [15] Serre, J. P. (1955). *Sur la dimension homologique des anneaux at des modules noetheriens*, Proceedings of the international symposium on algebraic number theory, Tokyo & Nikko, (Tokyo), Science Council of Japan, 1956, pp. 157-189.
- [16] Vasconcelos, W.V. (1974). *Divisor theory in module categories*, North-Holland Publishing Co., Amesterdam.
- [17] Wagstaff, S. (2007). *Semi-dualizing modules and divisor class group*, Illinois J. Math. **51**, no. 1, 255-285.
- [18] White, D. (2010). *Gorenstein projective dimension with respect to a semidualizing module*, J. Comm. Algebra **2**, 111-137.
- [19] Xu, J. (1996). *Flat covers of modules*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **1634**, Springer.
- [1] Araya, T. and Takahashi, R. and Yoshino, Y. (2005). *Homological invariants associated to semi-dualizing bimodules*, J. Math. Kyoto Univ. **45**, no. 2, 287-306.
- [2] Auslander, M. and Bridger, M. (1969). *Stable module theory*, Mem. Amer. Math. Soc., **94**.
- [3] Auslander, M. and Buchsbaum, D.A. (1957). *Homological dimension in local rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **85**, 390-405.
- [4] Bahlekeh, A. and Kakaie, T. (2017). *Generalized Gorenstein dimension over group rings*, J. Algebraic system. **5** no. 1, 53-64.
- [5] Brown, K.S. (1982). *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, **37**, Berlin, Heidelberg, New York, Springer.
- [6] Enochs, E. and Jenda, O.M.G. (1995). *Gorenstein injective and projective modules*, Math. Z. **220**, 611-633.
- [7] Enochs, E. and Jenda, O.M.G. and Torrecillas B. (1993). *Gorenstain flat modules*, Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan, **10**, 1-9.
- [8] Enochs, E.E. and Yassemi, S. (2004). *Foxby equivalences and cotorsion theories relative to semi-dualizing modules*, Math. Scand. **95**, 33-45.
- [9] Foxby, H.B. (1972). *Gorenstein modules and related modules*, Math. Scand. **31**, 267-284.
- [10] Gerko, A.A. (2001). *On homological dimensions*, Mat. Sb. **192**, no. 8, 79-94;

