دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره دهم، تابستان ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۰۱۶۹-۱۶۸۲

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

خواص رسته‌ای تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزیی

حسن برزگر *

گروه ریاضی، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۲/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۳/۲۱

چکیده

فرض کنیم $\mathcal{M}$ یک خانواده از تکریختی‌ها در رسته $\mathcal{A}$ باشد. برای مطالعه مفاهیم ریاضی مانند انژکتیوی، ضرب تانسوری و یکدست بودن نیاز به اطلاعات رسته‌ای و جبری زوج $(\mathcal{A},\mathcal{M})$ داریم. در این مقاله $\mathcal{A}$ را رسته $Pos-S$ از S-مجموعه‌های مرتب جزیی روی نیم گروه مرتب S و $\mathcal{M}=\mathcal{M}_{po}$ را خانواده تمام تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزیی در نظر می‌گیریم. هدف اصلی مطالعه خواص رسته‌ای حدها و هم حدها برای تکریختی‌های مذکور است.

واژه‌های کلیدی: S-مجموعه مرتب جزیی، تکریختی‌های خالص مرتب جزیی، حدها، هم‌حدها.

*. عهده‌دار مکاتبات:

Email h56bar@tafreshu.ac.ir

۱. مقدمه

در این مقاله رسته $Pos - S$ را رسته تمام S–مجموعه‌های مرتب جزیی روی نیم‌گروه S و $\mathcal{M}_{po}$ را خانواده تمام تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزیی که به صورت زیر تعریف می‌شود در نظر بگیریم.

تعریف ۱. زیر S–مجموعه مرتب جزیی A را در B، خالص مرتب جزیی نامیم اگر هر دستگاه متناهی از نامعادلات که در B حلپذیر باشد، در A نیز حلپذیر باشد. تکریختی $f: A \to B$ را یک تکریختی خالص مرتب جزیی گوییم اگر $f(A)$ یک زیر S–مجموعه مرتب جزیی از B باشد.

در اینجا قصد داریم خواص رسته‌ای چنین تکریختی‌هایی از قبیل خواص ترکیبی، حدها و هم حدهای آن را بررسی کنیم. این خواص معمولاً برای مطالعه مفاهیم همولوژیکی مانند انژکتیوی و پروژکتیوی S–سیستم‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در ابتدا خلاصه‌ای در مورد مفاهیمی چون مجموعه مرتب جزیی، نیم‌گروه، S–سیستم و S–مجموعه مرتب جزیی را که مورد نیاز است بیان می‌کنیم.

در بخش دوم خواص رسته‌ای تکریختی خالص مرتب جزیی از قبیل خواص ترکیبی، حدها و هم‌حدها مورد مطالعه قرار گرفته است.

اشیا انژکتیو یکی از مهمترین اشیا در تمامی شاخه‌های جبر می‌باشد. این اشیا را نسبت به رسته خاصی از تکریختی‌ها تعریف می‌کنند. بنابر این بررسی خواص رسته‌ای این نوع تکریختی‌ها اهمیت پیدا می‌کند.

پرسش اساسی که در اینگونه تکریختی‌ها وجود دارد این است که کدام یک خواص شناخته شده، از قبیل خواص رسته‌ای، خواص همولوژیکی و محک بیر که در انواع مختلف انژکتیوی در رسته‌های گوناگون بررسی شده است، در این نوع تکریختی‌ها برقرار می‌باشد.

در حدود سال ۱۹۶۰، Berkheaum شیء انژکتیو را در رستهS –سیستم‌ها تعریف و خواص رسته‌ای آن را بررسی کرد. بعد از آن افراد زیادی به بررسی خواص همولوژیکی و محک بیر آن و همچنین انواع خاصتر شیء انژکتیو در این رسته پرداختند. افرادی نظیر Normak، Skornjakov، Gould، Knower، Bulman fleming، kilp ... و ریاضیدانان ایرانی نظیر پروفسور محمد مهدی ابراهیمی، مژگان محمودی، اکبر گلچین، غلامرضا مقدسی، لیلا شهباز، حمید رسولی و .... همانطور که می‌دانیم محک بیر در رسته مدولها برقرار است ولی در رسته S–سیستم‌ها و S–مجموعه‌های مرتب جزیی در حالت کلی برقرار نیست. در نتیجه تکریختی‌های مختلفی تاکنون تعریف شده‌اند و محک بیر برای آنها بررسی شده است. تکریختی‌هایی که ما در اینجا معرفی می‌کنیم نیز می‌تواند در نهایت به بررسی چنین محکی برای S–مجموعه‌های مرتب جزیی انژکتیو آن منجر شود.

۲. تعاریف و مقدمات

در این فصل ابتدا به معرفی مجموعه‌های مرتب جزیی پرداخته و مفاهیم بنیادین آن از قبیل کرانداری و جهتداری معرفی شده است. سپس به طور خلاصه به تعریف رستهٔ $Act - S$ از S–سیستم‌های راست پرداخته و برخی از مفاهیم رسته‌ای و جبری$Act - S$ را بیان می‌کنیم و در آخر بطور خلاصه رسته$Pos - S$ از S–مجموعه‌های مرتب جزیی معرفی شده است.

تعریف ۲. رابطهٔ دوتایی $\leq$ روی مجموعهٔ A را یک *رابطهٔ ترتیب جزئی (ترتیب)* می‌نامیم هرگاه $\leq$ انعکاسی، پادتقارنی و متعدی باشد. در این صورت $(A, \leq)$، یا به طور ساده A، را یک مجموعهٔ *مرتب جزئی (مرتب)* می‌نامیم. همچنین اگر $(A, \leq)$ یک مجموعهٔ مرتب باشد، می‌گوییم $(A, \leq)$ یک مجموعهٔ *مرتب کلی* است هرگاه برای هر دو عضو $a, b \in A$، داشته باشیم $a \leq b$ یا $b \leq a$. هر مجموعهٔ مرتب کلی را یک *زنجیر* می‌نامیم.

تعریف ۳. فرض کنیم P یک مجموعهٔ مرتب باشد. هر زیرمجموعهٔ Q از P همراه با تحدید ترتیب P روی Q را یک *زیرمجموعهٔ مرتب* از P می‌نامیم.

زیرمجموعهٔ مرتب D از مجموعهٔ مرتب P را یک مجموعهٔ *پایینی* نامیم هرگاه $a \leq b \in D$ نتیجه دهد $a \in D$. فرض کنیم$(A, \leq)$ و $(B, \leq')$ دو مجموعهٔ مرتب و $f: A \to B$ تابع باشد. می‌گوییم f *حافظ ترتیب (یکنوا)* است هرگاه، اگر در A، $a_1 \leq a_2$آنگاه $f(a_1) \leq' f(a_2)$. همچنین f را یک *نشانندهٔ ترتیبی*

(نشاننده) می‌نامیم هر گاه برای هر $a_1, a_2 \in A$، $a_1 \le a_2$ اگر و فقط اگر $f(a_1) \le' f(a_2)$.
عضو $a \in A$ ماکسیمم (می‌نیمم) گوییم، هرگاه برای هر $b \in A$ داشته باشیم $b \le a$ $(a \le b)$. عضو ماکسیمم را با نماد $\top$ $(\bot)$ نمایش می‌دهیم.

یک گروهواره (یک مجموعه با یک عمل دوتایی) با ضرب شرکت‌پذیر یک *نیم‌گروه* نامیده می‌شود. یک نیم‌گروه با عضو همانی ۱، تکواره نامیده می‌شود. عضو z از نیم‌گروه S یک *صفر راست* گفته می‌شود هرگاه به ازای هر $s \in S$ داشته باشیم $sz = z$ ، همچنین عضو $z \in S$ یک *صفر چپ* گفته می‌شود هرگاه به ازای هر $s \in S$ داشته باشیم $zs = z$. یک عضو *صفر* S عضوی مانند 0 از S است که هم صفر راست و هم صفر چپ باشد. نیم‌گروه S را که هر عضو آن یک صفر چپ باشد یک *نیم‌گروه صفر چپ* گویند.

کُنش یک نیم‌گروه روی یک مجموعه همواره ابزار مفیدی برای مطالعهٔ ساختارهای ریاضی بوده است، اخیراً نیز مورد علاقهٔ برخی از کسانی شده است که در زمینهٔ علوم کامپیوتر کار می‌کنند. در ادامه به طور خلاصه اجزاء تشکیل دهندهٔ این رسته را بیان خواهیم کرد (برای اطلاعات بیشتر [۸]،[۱۱] و [۱۲] را ببینید).

تعریف ۴. فرض کنید S یک نیم‌گروه و A یک مجموعه باشد. اگر نگاشت

$$\begin{array}{llll}\mu: & A\times S & \to & A \\ & (a,s) & \mapsto & as := \mu(a,s),\end{array}$$

که کنش S بر A نامیده می‌شود موجود باشد به قسمی که برای هر $a \in A$ و هر $s,t \in S$ داشته باشیم $a(st) = (as)t$، در این صورت A را یک S–*سیستم (راست)* یا یک *سیستم (راست)* روی S می‌نامیم. اگر S یک تکواره با عضو همانی ۱ باشد در این صورت معمولاً نیاز است که شرط $a1 = a$ نیز برای هر $a \in A$ برقرار باشد، در واقع هر S–سیستم، یک جبر $(A,(\mu_s)_{s\in S})$ است که $\mu_s: A \to A$ یک عمل یکانی است به طوری که به ازای هر s,t از S، $\mu_s \circ \mu_t = \mu_{st}$. به‌علاوه، اگر S عضو همانی ۱ داشته باشد در این صورت فرض می‌کنیم $\mu_1 = id_A$. عضو $a \in A$ یک *عضو ثابت* یا یک *عضو صفر* در A نامیده می‌شود هرگاه برای هر $s \in S$ شرط $as = a$ برقرار باشد. فرض کنید A' یک زیرمجموعه از A باشد. در این صورت A' یک *زیر سیستم* A نامیده می‌شود، و با نماد $A' \le A$ نمایش داده می‌شود، هرگاه برای هر $a' \in A'$ و هر $s \in S$ داشته باشیم $a's \in A'$. همچنین A یک *توسیع* A' *نامیده می‌شود. هر نیم‌گروه* S*، با عمل دو تایی خود به عنوان کنش، خود یک* S*- سیستم است. با الحاق همانی خارجی ۱ به نیم‌گروهی که عضو همانی ندارد تکوارهٔ* $S \cup \{1\}$ *به دست می‌آید که با* S^1 *نمایش داده می‌شود.*

تعریف ۵. نگاشت $f: A \to B$ بین دوS–سیستم A و B یک S–نگاشت یا S–همریختی گفته می‌شود اگر، به ازای هر $s \in S$ و هر $a \in A$، $f(as) = f(a)s$. همریختی $f: A \to B$ یکریختی نامیده می‌شود اگر، هم یک به یک و هم پوشا باشد. در این صورت گفته می‌شود که A و B *یکریخت* هستند و با نماد $A \cong B$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۶. فرض کنید A یک S–سیستم باشد. یک رابطهٔ هم‌ارزی ρ روی A یک *همنهشتی* S*–سیستمی* یا *همنهشتی* روی A نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر $a, a' \in A$ و $s \in S$، $a\rho a'$ نتیجه دهد $as\rho a's$. در این صورت A/ρ با عمل طبیعی $[a]_\rho s = [as]_\rho$، به ازای هر $s \in S$، یک S–سیستم راست است که *سیستم خارج قسمتی* A توسط ρ نامیده می‌شود. همریختی

$$\begin{array}{llll}\pi_\rho: & A & \to & A/\rho \\ & a & \mapsto & [a]_\rho,\end{array}$$

بروریختی کانونی نامیده می‌شود.

تعریف ۷. فرض کنید $f: A \to B$ یک S–نگاشت باشد. در این صورت هم‌ارزی هستهٔ f ، $kerf$، که به ازای هر $a, a' \in A$ به صورت $a(kerf)a'$ اگر و تنها اگر $f(a) = f(a')$ تعریف می‌شود یک همنهشتی روی سیستم‌ها است و *همنهشتی هستهٔ* f نامیده می‌شود. حال به معرفی رستهٔ $Pos - S$ از S–مجموعه‌های مرتب می‌پردازیم. همچنین، ویژگی‌های رسته‌ای این رسته را که در این مقاله مورد نیاز هستند یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۸. تکواره (نیم‌گروه، گروه) S را یک *تکواره (نیم‌گروه، گروه) مرتب* می‌نامیم هرگاه S یک مجموعهٔ

مرتب باشد و ترتیب، با عمل دوتایی روی S سازگار باشد. به عبارت دیگر، $s \leq t$ و $s' \leq t'$ نتیجه دهد $ss' \leq tt'$. زیرمجموعهٔ مرتب T از تکوارهٔ مرتب S را یک *زیرتکوارهٔ مرتب* می‌گوییم هرگاه $T^2 \subseteq T$.

تعریف ۹. فرض کنیم S یک تکوارهٔ مرتب و A یک مجموعهٔ مرتب باشد. می‌گوییم A یک S–مجموعهٔ (S– سیستم) *مرتب راست* است، هرگاه A یک S–مجموعهٔ راست باشد به طوری که کنش S روی A ترتیب را حفظ کند. به بیان دیگر، برای هر $a, a' \in A$ و $s, s' \in S$، $a \leq a'$ و $s \leq s'$ نتیجه دهد $as \leq a's'$. هرگاه A و B دو S–مجموعهٔ مرتب راست باشند و $f: A \rightarrow B$ یک تابع باشد، گوییم f یک *همریختی S–مجموعه‌ای مرتب راست* است هرگاه f یک همریختی S–مجموعه‌ای راست و حافظ ترتیب باشد. کلاس همهٔ S–مجموعه‌های مرتب راست به همراه همریختی‌های بین آنها تشکیل یک رسته می‌دهند. این رسته را با $Pos-S$ نمایش می‌دهیم.

به طور مشابه می‌توان S–مجموعهٔ مرتب چپ را نیز تعریف کرد. اما در سراسر این مقاله، S–مجموعه‌های مرتب راست را در نظر می‌گیریم و به اختصار، آنها را S– مجموعهٔ مرتب می‌گوییم.

توجه ۱۰. هر تکوارهٔ مرتب S، با عمل دوتایی خود به عنوان کنش، به وضوح یک S –مجموعهٔ مرتب است.

تعریف ۱۱. زیرمجموعهٔ مرتب B از S– مجموعهٔ مرتب A را یک *زیرS–مجموعهٔ مرتب* می‌نامیم هرگاه برای هر $b \in B$ و هر $s \in S$، داشته باشیم $bs \in B$. همچنین در این صورت، A یک *توسیع* B نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲. رابطهٔ هم‌ارزی θ روی S– مجموعهٔ مرتب A را یک *همنهشتی S– مجموعه‌های مرتب*[1] می‌نامیم هرگاه θ یک همنهشتی S– مجموعه‌ها باشد با این خاصیت که S–مجموعهٔ A/θ، با یک ترتیب، به گونه‌ای تبدیل به یک S– مجموعهٔ مرتب شود که همریختی طبیعی S– مجموعه‌ای $A \rightarrow A/\theta$، یک همریختی S– مجموعه‌ای مرتب گردد (برای هر $a, a' \in A$، $a \leq a'$ نتیجه دهد $[a] \leq [a']$).

مثال زیر نشان می‌دهد که برای یک S–مجموعهٔ مرتب A و همنهشتی S–مجموعه‌های θ روی A، ممکن است بتوان ترتیب‌های مختلفی را روی S–مجموعهٔ A/θ قرار داد که همریختی طبیعی $A \rightarrow A/\theta$ حافظ ترتیب شود (θ یک همنهشتی S –مجموعه‌های مرتب گردد).

مثال ۱۳. فرض کنیم $S = \{1\}$ و $A = \{a, b, \top\}$ به طوری که a و b مقایسه‌پذیر نباشند. قرار می‌دهیم $\theta = \Delta$ (رابطهٔ تساوی). به آسانی می‌توان دید که تحت سه ترتیب متمایز زیر روی A/Δ، Δ یک همنهشتی S– مجموعه‌های مرتب خواهد شد:

۱) $[a]$ و $[b]$ مقایسه‌پذیر نباشند و $[\top]$ بزرگترین عضو باشد،

۲) $[a] < [b] < [\top]$،

۳) $[b] < [a] < [\top]$.

یادآوری می‌کنیم [۱۲] که برای S–مجموعهٔ A و $H \subseteq A \times A$، همنهشتی S–مجموعه‌های تولید شدهٔ $\theta(H)$ روی A توسط H، به صورت زیر توصیف می‌شود:

$a\theta(H)a'$ اگر و تنها اگر $a = a'$ یا به ازای عضوهایی مانند $s_i \in S$ و $(x_i, x'_i) \in H \cup H^{-1}$،

$$a = x_1s_1, x'_1s_1 = x_2s_2, \ldots, x'_ns_n = a'.$$

$i = 1, \ldots, n$، برای مشخص‌سازی و توصیف همنهشتی‌های S –مجموعه‌های مرتب تولید شده توسط روابط دوتایی، ابتدا به تعریف زیر توجه می‌کنیم:

تعریف ۱۴. برای یک رابطهٔ دوتایی R روی S– مجموعهٔ مرتب A، منظور از R زنجیر، رابطه‌ای مانند $\leq_R$ روی A است به طوری که برای هر $a, a' \in A$، $a \leq_R a'$ اگر و تنها اگر عضوهایی مانند $a_1, a'_1, \ldots, a_n, a'_n \in A$ وجود داشته باشند که $a \leq a_1Ra'_1 \leq \ldots \leq a_nRa'_n \leq a'$.

لم ۱۵. [۶] *یک همنهشتی S– مجموعه‌های θ روی S–مجموعهٔ مرتب A، یک همنهشتی S– مجموعه‌های مرتب است اگر و تنها اگر برای هر $a, a' \in A$، $a \leq_\theta a' \leq_\theta a$ نتیجه دهد $a\theta a'$.*

تعریف ۱۶. برای رابطهٔ دوتایی H روی S –مجموعهٔ مرتب A، همنهشتی S– *مجموعه‌های مرتب القا شده* $\nu(H)$ *روی A توسط* H به صورت زیر تعریف می‌شود:

---
1. S-poset congruence

$av(H)a'$ اگر و تنها اگر $a \leq_{\alpha(H)} a' \leq_{\alpha(H)} a$،
که در آن $a\alpha(H)a'$ اگر و تنها اگر $a = a'$ یا
$a = x_1s_1, x'_1s_1 = x_2s_2, \ldots, x'_ns_n = a'$،
به ازای $s_i \in S$ و $(x_i, x'_i) \in H$، $i = 1, \ldots, n$.
همچنین، رابطهٔ ترتیب مورد نظر روی $A/\nu(H)$ به صورت زیر است:
اگرو تنها اگر $[a]_{\nu(H)} \leq [a']_{\nu(H)}$ و $a \leq_{\alpha(H)} a'$.
می‌توان نشان داد که $\nu(H)$ کوچک‌ترین همنهشتی S-مجموعه‌های مرتب روی A است به طوری که برای هر $(x, x') \in H$، $[x]_{\nu(H)} \leq [x']_{\nu(H)}$. همچنین، در حالت خاص، $\theta(H) = \nu(H \cup H^{-1})$، *همنهشتی S-مجموعه‌های مرتب تولید شدهٔ $\theta(H)$ روی A توسط H* (کوچک‌ترین همنهشتی S-مجموعه‌های مرتب روی A و شامل H) است.

در این قسمت، با استفاده از منبع [۶] برخی مفاهیم و خواص رسته‌ای S-مجموعه‌های مرتب را یادآوری می‌کنیم.

گزاره ۱۷. *فرض کنیم $(A_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از S-مجموعه‌های مرتب باشد. در این صورت،*
(i) ضرب $(A_i)_{i\in I}$ در رستهٔ $Pos - S$ عبارت است از حاصلضرب دکارتی آنها، $\prod_{i\in I} A_i$، با ترتیب مولفه‌ای و کنش مولفه‌ای اعضای S، یعنی برای $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$ و $s \in S$، $(a_i)_{i\in I}s = (a_is)_{i\in I}$.
(ii) همضرب $(A_i)_{i\in I}$ در رستهٔ $Pos - S$ عبارت است از اجتماع مجزای آنها، $\coprod_{i\in I} A_i$، با همان ترتیب موجود در A_iها و کنش طبیعی اعضای S، یعنی برای $a \in \coprod_{i\in I} A_i$ و $s \in S$، چون برای عضوی مانند $i \in I$، داریم $a \in A_i$، لذا as همان کنش تعریف شده در S-مجموعهٔ مرتب A_i می‌باشد.

تعریف ۱۸. برای خانوادهٔ $\{A_i: i \in I\}$ از S-مجموعه‌های مرتب، که هر کدام دارای یک عضو صفر منحصربه‌فرد θ هستند، جمع مستقیم، $\bigoplus_{i\in I} A_i$، به صورت زیر S-مجموعهٔ مرتب حاصلضرب $\prod_{i\in I} A_i$ و شامل تمامی $(a_i)_{i\in I}$ به طوری که به‌ازای همهٔ i ها به استثناء تعداد متناهی اندیس i در I، $a_i = \theta$ تعریف می‌شود.

در اینجا ساختار کلی حدها و همحدها را در رستهٔ $Pos - S$ معرفی می‌کنیم.

گزاره ۱۹. *فرض کنیم $D: I \to Pos - S$ یک نمودار باشد که برای هر $\alpha \in I = ObjI$، S-مجموعهٔ مرتب A_α و همچنین به ازای هر $\alpha \to \beta \in MorI$، همریختی S- مجموعه‌ای مرتب $g_{\alpha\beta}: A_\alpha \to A_\beta$ را مشخص می‌کند. در این صورت،*
(i) حد D برابر است با $A = limA_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha$ که در آن
$E_\alpha = \{a = (a_\beta)_{\beta\in I} \in \prod_\beta A_\beta: (\forall\beta \in I) g_{\alpha\beta}p_\alpha(a) = p_\beta(a)\}$،
و p_α و p_β، αو β اُمین نگاشت‌های تصویری ضرب هستند. همچنین، همریختی‌های S-مجموعه‌ای مرتب حدی به صورت $q_\alpha := p_\alpha|_A: limA_\alpha \to A_\alpha$ تعریف می‌شوند.
(ii) همحد D برابر است با $colimA_\alpha := \coprod_{\alpha\in I} A_\alpha/\theta$، که در آن θ همنهشتی تولید شده توسط $H = \{(u_\alpha(a_\alpha), u_\beta g_{\alpha\beta}(a_\alpha)): a_\alpha \in A_\alpha, \alpha \to \beta \in MorI\}$ است. همریختی‌های S-مجموعه‌ای مرتب همحدی به صورت $g_\alpha := \gamma_\theta u_\alpha: A_\alpha \to colimA_\alpha$ هستند که u_αها نگاشت‌های هم‌ضربی بوده و γ_θ بروریختی طبیعی خارج قسمتی است.

۳. خواص رسته‌ای تکریختی‌های خالص مرتب جزیی

در این بخش فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ خانواده S -سیستم‌های مرتب جزیی راست روی نیم‌گروه مرتب جزیی S و $\mathcal{M}ono$ خانواده همهٔ تکریختی‌های مرتب جزیی در رستهٔ $Pos - S$، $\mathcal{M}_{po}$ خانواده تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزیی و $\mathcal{M}_{reg}$ خانواده همهٔ تکریختی‌های منظم مرتب جزیی S - سیستم‌های مرتب راست باشند.
تکریختی‌های خالص در رسته $Act - S$ از S-سیستم‌ها روی نیم‌گروه S، برای اوّلین بار توسط Gould در [۹] و [۱۰] تعریف شدند. در اینجا ما این مفهوم را به تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزیی در رسته $Pos - S$ تعمیم می‌دهیم. در واقع، تکریختی‌های خالص مرتب جزیی دیدگاه جدیدی نسبت به محک بئر

برای انژکتیوی سیستم‌ها به دست می‌دهند. فرض کنیم A یک S-مجموعه مرتب جزیی باشد. نامعادلات یک دستگاه از نامعادلات با ثابت‌های در A فقط می‌تواند به یکی از صورت‌های زیر باشد:

$xs \leq xt, xs \leq yt, xs \leq a, a \leq xs$

که در آن $s, t \in S$ و$a \in A$. پارامترهای x و y را متغیر، s و t را ضرایب و a را ثابت می‌نامیم. یک دستگاه از نامعادلات فوق مانند Σ را در یک S-مجموعه مرتب جزیی مانند B حلپذیر گوییم، اگر Σ در B دارای یک مجموعه جواب باشد.

تعریف ۲۰. *زیر S-مجموعه مرتب جزیی A را در B، خالص مرتب جزیی نامیم اگر هر دستگاه متناهی از نامعادلات با ثابت‌های در A که در B حلپذیر باشد، در A نیز حلپذیر باشد.*

در سه زیر بخشی که می‌آیند برخی از خواصّ جبری و رسته‌ای رستهٔ $Pos - S$ را نسبت به تکریختی‌های خالص مرتب جزیی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. خواصّ ترکیب، حد، و هم‌حد را در این بخش‌ها مطالعه می‌کنیم. این خواص ابزاری برای مطالعه انژکتیوی و مفاهیم همولوژی مربوط به $\mathcal{M}_{po}$ می‌باشند.

۱.۳. خواص ترکیبی تکریختی‌های خالص مرتب جزیی

در این زیر بخش تعدادی از خواص کلاس $\mathcal{M}_{po}$، به ویژه خواص مربوط به ترکیب تکریختی‌های خالص مرتب جزیی را به دست می‌آوریم. این خواص و خواصی که در ادامهٔ بخش می‌آیند برای مطالعهٔ انژکتیوی مورد نیازند.

توجه ۲۱. *مشاهده می‌کنید که همهٔ یکریختی‌ها مرتب جزیی، خالص هستند و ترکیب یک یکریختی با یک تکریختی خالص مرتب جزیی، یک تکریختی خالص مرتب جزیی است.*

خانواده $\mathcal{M}_{po}$ را تحت ترکیب بسته گوییم، اگر ترکیب هر دو تکریختی خالص مرتب جزیی یک تکریختی خالص مرتب جزیی باشد.

همانطور که در ادامه خواهیم دید کلاس $\mathcal{M}_{po}$ همواره تحت ترکیب بسته است.

لم ۲۲. *خانواده $\mathcal{M}_{po}$ تحت ترکیب بسته است.*

اثبات: فرض کنیم که $f: A \to B$ و $g: B \to C$ دو تکریختی خالص مرتب جزیی باشند. بدون اینکه از کلیت مساله کاسته شود می‌توان فرض کرد که f و g شمول باشند. فرض کنیم Σ دستگاهی متناهی از نامعادلات با ثابت‌های در A باشد که دارای مجموعه جوابی در C است. در نتیجه Σ دستگاهی با ثابت‌های در B است که جوابی در C دارد. بنابراین Σ جوابی در B و در نتیجه در A دارد.

نتیجهٔ زیر نشان می‌دهد که$\mathcal{M}_{po}$ حذف‌پذیر چپ است. به این معنی که برای تکریختی‌های f و g اگر $gf \in \mathcal{M}_{po}$ آنگاه $f \in \mathcal{M}_{po}$.

قضیه ۲۳. *خانواده $\mathcal{M}_{po}$ حذف‌پذیر چپ است.*

اثبات: درستی حکم فوق به‌سادگی قابل بررسی است.

مثال زیر نشان می‌دهد که حذف‌پذیری راست لزوماً برقرار نمی‌باشد.

فرض کنیم $S = \{s_1, s_2\}$ نیم گروه چپ صفر با ترتیب معمولی باشد. فرض کنیم $C = \{a, b, c\}$ یک زنجیر سه عضوی باشد بطوریکه a و c عناصر ثابت و عمل روی b بصورت $bs_1 = a, bs_2 = c$ تعریف شود. زیر S-مجموعه‌های مرتب جزیی $A = \{a\}$ و $B = \{a, c\}$ را در نظر بگیرید. واضح است که A زیر سیستم خالص مرتب جزیی از B است. دستگاه $\{xs_1 \leq a, xs_2 \geq c\}$ جوابی مانند $b \in C$، دارد، ولی جوابی در B ندارد. بنابراین C توسیع خالص B نمی‌باشد.

حال دو مثال از تکریختی خالص مرتب جزیی ارایه می‌دهیم که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال ۲۴. (i) *عضو ثابت a_0 را در S-مجموعه مرتب جزیی A در نظر بگیرید. عضو θ را به آن تحت عمل $\theta s = a_0 s (s \in S)$ و رابطه $\theta \leq a$ اگر و تنها اگر $a_0 \leq a$ و نیز $\theta \geq a$ اگر و تنها اگر $a_0 \geq a$ الحاق کنید. در اینصورت A، تکریختی خالص مرتب جزیی در A^{θ} است.*

(ii) اگر A دارای عضو ثابت یا ماکسیمم و یا مینیمم باشد، در اینصورت A یک زیر سیستم خالص از A^{θ} است

بطوریکه θ عضو ثابتی است که در ارتباط با دیگر عناصر A نمی‌باشد.

۲.۳. حد تکریختی‌های خالص مرتب جزیی

در این زیر بخش رفتار تکریختی‌های خالص مرتب جزیی را نسبت به حدها مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا توجه کنید که خانواده $\mathcal{M}$ را تحت ضرب، هم‌ضرب و جمع مستقیم بسته گوییم، اگر برای هر خانواده از تکریختی‌های خالص مرتب جزیی مانند $\{f_i: A_i \to B_i: i \in I\}$ نگاشت القایی ضرب، هم‌ضرب و جمع مستقیم، تکریختی خالص مرتب جزیی باشد.

قضیه ۲۵. (i) $\mathcal{M}_{po}$ *تحت ضرب بسته است.*

(ii) فرض کنیم $\{f_i: A \to B_i: i \in I\}$ یک خانواده از تکریختی‌های خالص مرتب جزیی باشد. در اینصورت همریختی القایی $f: A \to \prod B_i$ نیز تکریختی خالص مرتب جزیی است.

اثبات: فرض کنید $\{f_i: A_i \to B_i: i \in I\}$ یک خانواده از تکریختی‌های خالص مرتب جزیی باشد. نمودار جابجایی زیر را به ازای هر $i \in I$ در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ccc} \prod\limits_{i\in I} A_i & \overset{f}{\rightarrow} & \prod\limits_{i\in I} B_i \\ p_i \downarrow & & \downarrow p_i \\ A_i & \overset{f_i}{\rightarrow} & B_i \end{array}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که:

$f = (f_i)_{i\in I}: \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$

یک تکریختی خالص مرتب جزیی است. فرض کنیم Σ در $\prod_{i\in I} B_i$ حلپذیر باشد و $[\Sigma]$ مجموعه نامساوی‌های آن بعد از جایگذاری مجموعه جواب آن باشد. طبق گزاره ۲ از مرجع [۱۴]، f یک تکریختی منظم است. به ازای هر $j \in J$ مجموعه Σ_j را نامساویهایی در A_j در نظر می‌گیریم که از j–امین مولفه نامعادلات در Σ بدست آمده باشند. چون هر A_j در B_j خالص است و Σ_j جوابی در B_j دارد، پس Σ_j جوابی در A_j و در نتیجه Σ جوابی در A دارد.

اثبات قسمت دوم مانند اثبات قسمت اول است.

خانواده تکریختی‌های خالص مرتب جزیی را تحت $\mathcal{M}_{po}$- عقب‌برها بسته گوییم، اگر عقب‌بر یک تکریختی خالص مرتب جزیی در طول یک مورفیسم دوباره خالص است. مثال زیر نشان می‌دهد کلاس تکریختی‌های خالص مرتب جزیی تحت $\mathcal{M}_{po}$- عقب‌برها بسته نمی‌باشد.

مثال ۲۶. *خانواده تکریختی‌های خالص مرتب جزیی تحت* $\mathcal{M}_{po}$- *عقب‌برها بسته نمی‌باشد.*

S– مجموعه مرتب جزیی $B = \{a, b, c\}$ که در آن تمامی عناصر ثابت هستند و روابط $c \le a$ و $c \le b$ بین عناصر آن برقرار است را در نظر بگیرید. واضح است که $A = \{a, b\}$ در B خالص نیست، زیرا دستگاه $\Sigma = \{xs \le a, xs \le b\}$ دارای جواب $c \in B$ است ولی در A جواب ندارد. حال به سادگی دیده می‌شود که $D = \{d, e\}$ یک توسیع خالص از $C = \{e\}$ است. اکنون نمودار زیر:

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\tau}{\rightarrow} & B \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ C & \overset{\tau'}{\rightarrow} & D \end{array}$$

که در آن $f(a) = f(b) = e$ و $f(c) = d$، یک نمودار عقب‌بر می‌باشد، زیرا $f^{-1}(C) = A$.

قضیه ۲۷. *(i)* $\mathcal{M}_{po}$ *تحت حد بسته است.*

(ii) فرض کنیم $\{f_i: A \to B_i: i \in I\}$ یک خانواده از تکریختی خالص مرتب جزیی باشد. در اینصورت همریختی القایی $f: A \to lim_i B_i$ نیز تکریختی خالص مرتب جزیی است.

اثبات: فرض کنید $\mathcal{A}, \mathcal{B}: I \to Pos - S$ دیاگرام‌هایی در $Pos - S$ باشند که به ازای هر $\alpha \in I = ObjI$ سیستم‌های A_α و B_α، و به ازای هر $\alpha \to \beta \in MorI$، نگاشت‌های $g_{\alpha\beta}: A_\alpha \to A_\beta$ و $g'_{\alpha\beta}: B_\alpha \to B_\beta$ را نسبت می‌دهند. حد این دیاگرام‌ها را با نگاشت‌های حدی $q_\alpha: lim_\alpha A_\alpha \to A_\alpha$ و $q'_\alpha: lim_\alpha B_\alpha \to B_\alpha$ در نظر بگیرید. فرض کنید $\{f_\alpha: A_\alpha \to B_\alpha: \alpha \in I\}$ یک خانواده از تکریختی‌های خالص مرتب جزیی باشد.

نشان می‌دهیم $f = lim_\alpha f_\alpha : lim_\alpha A_\alpha \to lim_\alpha B_\alpha$ یک تکریختی خالص مرتب جزیی است. نمودار

$$\begin{array}{ccccc} lim_\alpha A_\alpha & \xrightarrow{q_\alpha} & A_\alpha & \xrightarrow{g_{\alpha\beta}} & A_\beta \\ \downarrow f & & \downarrow f_\alpha & & \downarrow f_\beta \\ lim_\alpha B_\alpha & \xrightarrow{q'_\alpha} & B_\alpha & \xrightarrow{g_{\alpha\beta}} & B_\beta \end{array}$$

را در نظر بگیرید. طبق لم ۱ از مرجع [۱۴]، f یک تکریختی منظم است. فرض کنیم دستگاه Σ با ثابت‌های در$f(A)$، جوابی در $lim_\alpha B_\alpha$ داشته باشد. به ازای هر نامعادله درΣ، نا معادله‌ای با ثابت‌های در $f_i(A)$ می‌توان ساخت که جوابی در B_i داشته باشد. بنابراین به ازای هر i، دستگاهی مانند Σ_i از نا معادلات با ثابت‌های در $f_i q_i(lim_i A_i)$ داریم که جوابی در B_i دارد. حال چون f_iها تکریختی خالص مرتب جزیی هستند، Σ_i مجموعه جوابی در $f_i q_i(lim_i A_i)$ دارد. چون $q'_i f = f_i q_i$، پس Σ جوابی در $f(lim_i A_i)$ دارد.

اثبات قسمت دوم مانند اثبات قسمت اول است.

۳.۳ هم‌حد تکریختی‌های خالص مرتب جزیی

در این زیربخش رفتار تکریختی‌های خالص مرتب جزیی را نسبت به هم‌حدها مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

قضیه ۲۸. *$\mathcal{M}_{po}$ تحت هم‌ضرب بسته است.*

اثبات: فرض کنید $\{f_i: A_i \to B_i : i \in I\}$ یک خانواده از تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزیی باشد. نمودار جابجایی زیر را به ازای هر $i \in I$ در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{f_i} & B_i \\ u_i \downarrow & & \downarrow u'_i \\ \coprod_{i\in I} A_i & \xrightarrow{f} & \coprod_{i\in I} B_i \end{array}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $f: \coprod_{i\in I} A_i \to \coprod_{i\in I} B_i$ یک تکریختی منظم خالص مرتب جزیی است. چون هر f_i تکریختی منظم مرتب جزیی است، طبق گزاره ۵ از مرجع [۱۴]، f تکریختی منظم مرتب جزیی است. همچنین f خالص است، زیرا فرض کنیم Σ دستگاهی متناهی از نامعادلات با ثابت‌های در $f(\coprod A_i)$ باشد که دارای مجموعه جوابی در $\coprod (B_i)$ است. مجموعه $[\Sigma]$ را مجموعه نامعادلات Σ بعد از جایگذاری جواب‌ها در نظر بگیریم. چون $\coprod (B_i)$ دارای ترتیب مؤلفه‌ای است، $[\Sigma]$ را می‌توان به زیر مجموعه‌های $[\Sigma_i]$ افراز کرد بطوریکه هر Σ_i یک مجموعه از نامعادلات با جواب‌های در B_i باشد. حال چون A_i در B_i خالص است، هر Σ_i جوابی در A_i و در نتیجه Σ جوابی در $\coprod A_i$ دارد.

تعریف ۲۹. رستهٔ $\mathcal{A}$ و زیر کلاس $\mathcal{M}$ از تکریختی مرتب جزیی‌ها را در نظر بگیرید. گفته می‌شود که رستهٔ $\mathcal{A}$ در ویژگی $\mathcal{M}$- انتقال صدق می‌کند اگر برای هر $f \in \mathcal{A}$ و هر $m \in \mathcal{M}$ با دامنهٔ مشترک، نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{m} & \bullet \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \bullet & \xrightarrow{u} & \bullet \end{array}$$

وجود داشته باشد که $u \in \mathcal{M}$.

مفهوم $\mathcal{M}$- انتقال توسط افرادی که جبر جامع کار می‌کنند به کار برده می‌شود ([۱۵]) در حالی که کسانی که نظریهٔ رسته کار می‌کنند ترجیح می‌دهند از ویژگی "$\mathcal{M}$ها توسط جلوبرها حفظ می‌شوند" یا "جلوبرها $\mathcal{M}$ها را منتقل می‌کنند" استفاده کنند. در صورتی که جلوبرها وجود داشته باشند و $\mathcal{M}$ حذف‌پذیر چپ باشد این دو مفهوم با هم یکی هستند.

لم زیر را از [۱۴] می‌آوریم:

لم ۳۰. *جلوبرها در رستهٔ $Pos - S$ تکریختی‌های منظم مرتب جزیی را منتقل می‌کنند.*

گزارهٔ زیر همتای $(E4)$ در [۱] است.

قضیه ۳۱. *جلوبرها در رستهٔ $Pos - S$ تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزیی را منتقل می‌کنند.*

اثبات: بنابر لم قبل، جلوبرها تکریختی‌های منظم مرتب جزیی را منتقل می‌کنند، پس کافیست نشان دهیم که جلوبرها مورفیسم‌های خالص را منتقل می‌کنند. نمودار جلوبری زیر را که در آن $f \in \mathcal{M}_{po}$ و $q_C = \gamma u_C: C \to (B\coprod C)/\theta$ و $q_B = \gamma u_B: B \to (B\coprod C)/\theta$ بروریختی‌های طبیعی، و $u_B: B \to B\coprod C$ و $u_C: C \to B\coprod C$ نگاشت‌های هم‌ضربی هستند، و θ رابطهٔ همنهشتی روی $B\coprod C$ تولید شده توسط $H = \{(u_B f(a), u_C g(a)): a \in A\}$ است در نظر بگیرید.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "q_B"] \\ C \arrow[r, "q_C"] & (B\coprod C)/\theta \end{tikzcd}$$

نشان می‌دهیم که $q_C \in \mathcal{M}_{po}$. طبق لم ۳۰، q_C یک تکریختی منظم مرتب جزیی است. حال نشان می‌دهیم خالص نیز می‌باشد. کافیست مساله را فقط برای حالتیکه

$$\Sigma = \{[(2,c_1')]_\theta \le x_1s_1, x_2s_2 \le [(2,c_2')]_\theta, x_3s_3 \le x_4s_4\}$$

یک مجموعه از نامعادلات با ضرایب در S و ثابت‌های در $q_C(C)$ باشد که دارای مجموعه جواب $\{[d_1]_\theta,[d_2]_\theta,[d_3]_\theta,[d_4]_\theta\}$ در $(B\coprod C)/\theta$ است، بررسی کنیم. در اینصورت به ازای هر i، یا $[d_i]_\theta \in q_C(C)$ و یا یک i وجود دارد که $[d_i]_\theta \in q_B(B)$.

در حالت اول $\{[d_1]_\theta,[d_2]_\theta,[d_3]_\theta,[d_4]_\theta\}$ یک مجموعه جواب برای Σ در $q_C(C)$ است و بنابراین حکم برقرار است. در حالت دوم، بدون اینکه از کلیت مساله کاسته شود می توان فرض کرد که:

$$[d_1]_\theta = [(2,c_1)]_\theta, [d_2]_\theta = [(2,c_2)]_\theta, [d_4]_\theta = [(2,c_4)]_\theta \in q_C(C)$$

و $[d_3]_\theta = [(1,b)]_\theta \in q_B(B)$. بنابراین باید مجموعه جوابی برای Σ در $q_C(C)$ بیابیم. هر یک از نامساوی‌های فوق را بطور مجزا بررسی می‌کنیم.

۱) با در نظر گرفتن $[(2,c_1')] \le [(2,c_1)]_\theta s_1$، یا $(۲,c_1') \le (2,c_1s_1)$ و یا $t_{11},\cdots,t_{1n_1} \in S$ و $c_{11},c_{12},\cdots,c_{1n},d_{11},d_{12},\cdots,d_{1n_1}$ وجود دارند که $(c_{1i},d_{1i}) \in H \cup H^{-1}, i=1,\cdots,n_1,$ بطوریکه:

$$(2,c_1') \le c_{11}s_{11}, d_{11}s_{11} \le c_{12}s_{12}, d_{12}s_{12} \le c_{13}s_{13},\cdots, d_{1n_1}s_{1n_1} \le (2,c_1s_1).$$

در اینصورت:

$$(2,c_1') \le (2,g(a_{11})s_{11}), (1,f(a_{11})s_{11}) \le (1,f(a_{12})s_{12}), (2,g(a_{12})s_{12}) \le (2,g(a_{13})s_{13}),\cdots,(2,g(a_{1n_1})s_{1n_1}) \le (2,c_1s_1).$$

۲) با در نظر گرفتن $[(2,c_2)]_\theta s_2 \le [(2,c_{2'})]$، یا $(2,c_2s_2) \le (2,c_{2'})$ و یا $t_{21},\cdots,t_{2n_2} \in S$ و $c_{21},c_{22},\cdots,c_{2n_2},d_{21},d_{22},\cdots,d_{2n_2}$ وجود دارند که $(c_{2i},d_{2i}) \in H \cup H^{-1}, i=1,\cdots,n_2,$ بطوریکه:

$$(2,c_2s_2) \le c_{21}s_{21}, d_{21}s_{21} \le c_{22}s_{22}, d_{22}s_{22} \le c_{23}s_{23},\cdots, d_{2n_2}s_{2n_2} \le (2,c_2').$$

در اینصورت:

$$(2,c_2s_2) \le (2,g(a_{21})s_{21}), (1,f(a_{21})s_{21}) \le (1,f(a_{22})s_{22}), (2,g(a_{22})s_{22}) \le (2,g(a_{23})s_{23}),\cdots,(2,g(a_{2n_2})s_{2n_2}) \le (2,c_2').$$

۳) برای نامساوی $[(1,b)]_\theta s_3 \le [(2,c_4)]_\theta s_4$، یا $(1,b) \le (2,c_4)$ که یک تناقض می‌باشد و یا $t_1,\cdots,t_n \in S$ و $c_{41},c_{42},\cdots,c_{4n},d_{41},d_{42},\cdots,d_{4n_4}$ که $(c_{4i},d_{4i}) \in H \cup H^{-1}$ برای $i=1,\cdots,n_4$، وجود دارند بطوریکه:

$$(1,b)s_3 \le c_{41}s_{41}, d_{41}s_{41} \le c_{42}s_{42}, d_{42}s_{42} \le c_{43}s_{43},\cdots, d_{4n}s_{4n} \le (2,c_4s_4).$$

بنابراین

$$(1,bs_3) \le (1,f(a_{41})s_{41}), (2,g(a_{41})s_{41}) \le (2,g(a_{42})s_{42}), (1,f(a_{42})s_{42}) \le (1,f(a_{43})s_{43}),\cdots,(2,g(a_{4n_4})s_{4n_4}) \le (2,c_4s_4).$$

از مطالب فوق نامساوی‌های $(2,c_1') \le (2,c_1s_1)$، $(2,c_2s_2) \le (2,c_2')$ و $bs_3 \le f(a_{41}s_{41})$ را می‌توان نتیجه گرفت. بنابراین $\Sigma_1 = \{xs_3 \le f(a_{41}s_{41})\}$ یک دستگاه با ثابت‌های در $f(A)$ است که دارای جواب b در B می‌باشد. حال چون f تکریختی خالص است، Σ_1 دارای جوابی در $f(A)$ مانند $f(a)$ می‌باشد، یعنی داریم $f(as_3) \le f(a_{41}s_{41})$ که چون f منظم است نامساوی‌های $as_3 \le a_{41}s_{41}$ و $g(as_3) \le g(a_{41}s_{41})$ را می‌توان بدست آورد. حال با استفاده از (۳) زنجیر زیر از نامساوی‌ها حاصل می‌شود:

$(2, g(a)s_3) \leq (2, g(a_{41})s_{41})$
$\leq (2, g(a_{42})s_{42}), (1, f(a_{42})s_{42})$
$\leq (1, f(a_{43})s_{43}), \cdots, (2, g(a_{4n_4})s_{4n_4})$
$\leq (2, c_4 s_4)$

و این یعنی $[(2, g(a))]_\theta s_3 \leq [(2, c_4)]s_4$.
بنابراین عناصر $[(2, c_1)]_\theta, [(2, c_2)]_\theta, [(2, g(a))]_\theta$ و $[(2, c_4)]_\theta$ مجموعه جوابی برای Σ در $q_C(C)$ می‌باشند. در نتیجه q_C یک تکریختی خالص مرتب جزیی می‌باشد.

قضیه ۳۲. *جلوبرهای چندتایی، تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزیی را منتقل می‌کنند.*

اثبات: فرض کنید $\{d_i: A \to B_i : i \in I\}$ یک خانواده از تکریختی‌های خالص مرتب جزیی باشد. یادآوری می‌کنیم که جلوبر چندتایی این خانواده $(\coprod_{i\in I} B_i)/\theta$ است که θ رابطهٔ همنهشتی روی $\coprod_{i\in I} B_i$ تولید شده توسط تمامی زوج‌های $H = \{(u_i d_i(a), u_j d_j(a)) : i, j \in I, a \in A\}$ است، و به ازای هر $i \in I$ ، $u_i: B_i \to \coprod_{i\in I} B_i$، i-اُمین نگاشت هم‌ضربی است. همچنین، $d'_i = \gamma u_i: B_i \to (\coprod_{i\in I} B_i)/\theta$ها نگاشت‌های جلوبری چندتایی هستند و $\gamma: \coprod_{i\in I} B_i \to (\coprod_{i\in I} B_i)/\theta$ بروریختی طبیعی است.

ابتدا نشان می‌دهیم که به ازای هر $i \in I$ ، d'_i تکریختی مرتب جزیی است. فرض کنید برای $b'_i, b_i \in B_i$، $d'_i(b_i) = d'_i(b'_i)$. در این صورت $(u_i(b_i), u_i(b'_i)) \in \theta$ و بنابراین یا $b_i = b'_i$ یا $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ و $k_1, \dots, k_{n+2} \in I$ وجود دارند که

$$u_i(b_i) = u_{k_1} d_i(a_1)$$
و $$u_{k_2} d_{k_2}(a_1) = u_{k_3} d_{k_3}(a_2)$$
و $$u_{k_4} d_{k_4}(a_2) = u_{k_5} d_{k_5}(a_3)$$
و ... $$u_{k_{n+2}} d_{k_{n+2}}(a_n) = u_i(b'_i)$$

بنابراین

$$k_1 = i, k_2 = k_3, k_4 = k_5, \dots, k_{n+2} = i$$

و لذا، چون d_k تکریختی مرتب جزیی است.

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \cdots = a_{n-1} = a_n$$
و $$b_i = d_i(a_1)$$

پس

$b_i = d_i(a_1) = d_i(a_2) = d_i(a_3) = d_i(a_n) = b'_i$.

در مرجع [۱۴]، قضیه ۲، نشان داده شده است که جلوبرهای چندتایی، تکریختی‌های منظم مرتب جزیی را منتقل می‌کنند. همچنین روند اثبات انتقال خالص بودن تحت جلوبر چندتایی مانند روند اثبات در قضیه ۳۱ می‌باشد. بنابراین جلوبرهای چندتایی، تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزیی را منتقل می‌کنند.

نتیجه ۳۳: *نگاشت قطری در جلوبرهای چندتایی، تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزیی، تکریختی منظم خالص مرتب جزیی است.*

اثبات: با بکار بردن قضایای ۲۲ و ۳۲ حکم براحتی بدست می‌آید.

تعریف ۳۴. گوییم رستهٔ $\mathcal{A}$، $\mathcal{M}$- *کران*[1] دارد اگر به ازای هر خانواده مانند $\{m_i: A \to A_i : i \in I\}$ از مورفیسم‌ها در $\mathcal{M}$ که با یک مجموعه اندیس گذاری شده‌اند یک $\mathcal{M}$- مورفیسم مانند $m: A \to B$ وجود داشته باشد که روی تمامی m_iها تجزیه شود، به این معنی که $d_i: A_i \to B$ ها وجود دارند که $d_i m_i = m$.

قضیه ۳۵. *رستهٔ $Pos - S$ ، $\mathcal{M}_{po}$-کران دارد.*

اثبات: فرض کنید $\{h_\alpha: A \to B_\alpha : \alpha \in I\}$ یک خانواده از مورفیسم‌ها در $\mathcal{M}_{po}$ باشند که با یک مجموعه اندیس گذاری شده‌اند و $h: A \to B = \coprod_{i\in I} B_i/\theta$ جلوبر چندتایی h_α ها باشد. دراین صورت h روی تمام h_α ها تجزیه می‌شود و بنابر گزارهٔ ۳۲، خالص است.

تعریف ۳۶. گوییم رستهٔ $\mathcal{A}$، خاصیت $\mathcal{M}$- *ترکیب*[2] دارد اگر مورفیسم m در تعریف $\mathcal{M}$-کران، روی تمامی m_iها توسط اعضای $\mathcal{M}$ تجزیه شود، به این معنی که d_iها متعلق به $\mathcal{M}$ باشند.

قضیه ۳۷: *رستهٔ $Pos - S$، خاصیت $\mathcal{M}_{po}$- ترکیب دارد.*

اثبات: چون بنابر گزارهٔ ۳۲، جلوبرهای چندتایی، تکریختی‌های خالص مرتب جزیی را منتقل می‌کنند، اثبات انجام شده است.

---

1. $\mathcal{M}$- bounds
2. $\mathcal{M}$- amalgamation property

در نهایت هم‌حدهای مستقیم تکریختی‌های منظم مرتب جزیی را در رسته $Pos-S$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. توجه کنید که یک دستگاه مستقیم از $S-$ مجموعه‌های مرتب جزیی و همریختی‌های بین آنها یک خانواده مانند $\{A_i\}_{i\in I}$ از $S-$ مجموعه‌های مرتب جزیی که با یک مجموعه جهتدار بالایی اندیس شده است، به همراه یک خانواده $(\psi_{ij}: A_i \to A_j)_{i\leq j}$ از همریختی‌ها است بطوریکه به ازای هر $i\leq j\leq k, \psi_{ik}=\psi_{jk}\psi_{ij}$ و $\psi_{ii}=id$. زوج $(colimA_i, g_i: A_i \to colimA_i)$ را هم‌حد مستقیم دستگاه مستقیم $((\{A_i\})_{i\in I}, (\psi_{ij})_{i\leq j})$ می‌نامیم اگر برای هر $i\leq j$ داشته باشیم $g_i\psi_{ij}=g_j$ و برای هر $(B, f_i: A_i\to B)$ با شرط $f_j\psi_{ij}=f_i$ یک همریختی منحصر بفرد $\nu: colimA_i \to B$ وجود داشته باشد بطوریکه $\nu g_i = f_i$.

توجه کنید، به مرجع [۵] رجوع شود، که هم حد مستقیمِ دستگاه مستقیمِ $((\{A_i\})_{i\in I}, (\psi_{ij})_{i\leq j})$ وجود دارد و بصورت $(A/\theta, (g_i: A_i \to A/\theta)_{i\in I})$ می‌باشد بطوریکه

۱) $A=\coprod A_i$.

۲) $(a\in A_i, a'\in A_j) a\theta a'$ اگر و تنها اگر $\exists k\geq i,j: \psi_{ik}(a)=\psi_{jk}(a')$.

۳) $(a\in A_i, a'\in A_j)[a]_\theta \leq [a']_\theta$ اگر و تنها اگر $\exists k\geq i,j: \psi_{ik}(a)\leq\psi_{jk}(a')$.

۴) به ازای هر $i\in I$ و $a\in A$ داشته باشیم $g_i(a)=[a]_\theta$.

قضیه ۳۸. *کلاس تکریختی‌های خالص مرتب جزیی تحت هم‌حدها بسته است.*

اثبات: فرض کنید $\mathcal{A},\mathcal{B}: I\to Pos-S$ دیاگرام‌هایی در $Pos-S$ باشند که به ازای هر $\alpha\in I=ObjI$، سیستم‌های A_α و B_α، و به ازای هر $\alpha\to\beta\in MorI$، نگاشت‌های $\psi_{\alpha\beta}: A_\alpha\to A_\beta$ و $\varphi_{\alpha\beta}: B_\alpha \to B_\beta$ را نسبت می‌دهند. حد این دیاگرام‌ها را با نگاشت‌های هم‌حدی:

$$f_\alpha=\gamma_\theta: A_\alpha \to colim_\alpha A_\alpha = \coprod_\alpha A_\alpha/\theta$$ و
$$g_\alpha=\gamma_{\theta'}: B_\alpha\to colim_\alpha B_\alpha=\coprod_\alpha B_\alpha/\theta'$$

در نظر بگیرید. فرض کنید $\{h_\alpha: A_\alpha\to B_\alpha: \alpha\in I\}$ یک خانواده از تکریختی‌های خالص باشد به طوری که $\{g_\alpha h_\alpha: A_\alpha \to colim_\alpha B_\alpha: \alpha\in I\}$ یک چاهک[1] برای دیاگرام $\mathcal{A}$ است. نشان خواهیم داد
$$h=colim_\alpha h_\alpha: colim(A_\alpha)\to colim(B_\alpha)$$
یک تکریختی خالص مرتب جزیی است. می‌دانیم θ همنهشتی تولید شده توسّط
$$H=\{(u_\alpha(a_\alpha), u_\beta\psi_{\alpha\beta}(a_\alpha)): a_\alpha\in A_\alpha, \alpha\to\beta\in MorI\}$$
و θ' همنهشتی تولید شده توسّط
$$H'=\{(u'_\alpha(b_\alpha), u'_\beta g_{\alpha\beta}(b_\alpha)): b_\alpha\in B_\alpha, \alpha\to\beta\in MorI\}$$
است. مشاهده می‌کنید که $h[u_\alpha(a_\alpha)]_\theta = [u'_\alpha h_\alpha(a_\alpha)]_{\theta'}$. چون هر h_α تکریختی منظم مرتب جزیی است، طبق قضیه ۳ از مرجع [۱۴]، h تکریختی منظم مرتب جزیی است. همچنین h، خالص است، زیرا فرض کنیم Σ دستگاهی متناهی از نامعادلات با ثابت‌های در $h(colimA_\alpha)$ باشد که دارای مجموعه جوابی در $colim(B_\alpha)$ است.

(i) فرض کنیم $[b_i]_{\theta'}\in colimB_\alpha$ یک جواب برای نامعادله $xs\leq h[(a_j)]_\theta$ باشد. داریم $[b_is]_{\theta'}\leq h[(a_j)]_\theta=[h_j(a_j)]_{\theta'}$ و در نتیجه $k\geq i,j$ وجود دارد که
$$\varphi_{ik}(b_i)s=\varphi_{ik}(b_is)\leq\varphi_{jk}(h_j(a_j)) = h_k\psi_{jk}(a_j)\in B_k$$
چون h_k تکریختی خالص است، $a_k\in A_k$ وجود دارد که $h_k(a_k)s\leq h_k\psi_{jk}(a_j)$. بنابراین
$$h([(a_k)]_\theta)s=g_kh_k(a_k)s\leq g_kh_k\psi_{jk}(a_j)=g_jh_j(a_j)=h[(a_j)]_\theta$$
که نتیجه می‌دهد نامعادله دارای جواب $h[(a_k)]_\theta$ در $h(colimA_\alpha)$ می‌باشد.

(ii) مانند قسمت (i) می‌توان نشان داد هر نامعادله به صورت $xs\geq h[(a_j)]_\theta$ دارای جوابی در $h(colimA_\alpha)$ می‌باشد.

(iii) فرض کنیم $x=[b_i]_{\theta'}$ و $y=[b_j]_{\theta'}$ یک جواب برای نامعادله $xs\leq yt$ در $colimB_\alpha$ باشد. در اینصورت $[b_is]_{\theta'}\leq[b_jt]_{\theta'}$ و در نتیجه $k\geq i,j$

1. sink

وجود دارد که $\varphi_{ik}(b_i s) \leq \varphi_{jk}(b_{j'})t$. چون h_k تکریختی خالص است، $a_k, a'_k \in A_k$ وجود دارند که $h_k(a_k)s \leq h_k(a'_k)t$.

بنابراین

$$h([(a_k)]_\theta)s = g_k h_k(a_k)s \leq g_k h_k(a'_k t) = h[a'_k]_\theta t$$

که نتیجه می‌دهد نامعادله دارای جواب در $h(colimA_\alpha)$ می‌باشد.

(iv) مانند قسمت (iii) می‌توان نشان داد هر نامعادله به صورت $xs \geq xt$ دارای جوابی در $h(colimA_\alpha)$ می‌باشد.

حال فرض کنیم Σ دارای n نامعادله باشد. در اثبات قسمت‌های فوق نشان داده شد که برای هر نامعادله در Σ، یک $k_m \in I$ $(1 \leq m \leq n)$ و $b, b' \in colimB_i$ وجود دارند که $\varphi_{ik_m}(b) \leq \varphi_{jk_m}(b') \in B_K$. چون مجموعه I جهتدار است، یک $M \in I$ ناکمتر از تمامی k_mها وجود دارد. بنابراین

$$\varphi_{iM}(b) = \varphi_{k_m M}\varphi_{ik_m}(b) \leq \varphi_{k_m M}\varphi_{jk_m}(b') = \varphi_{jM}(b') \in B_M.$$

در نتیجه دستگاه نامعادلات Σ_M با ثابت‌های در $h_M(A_M)$ بدست می‌آید که دارای یک مجموعه جواب در B_M می‌باشد. حال چون h_M خالص است، Σ_M دارای مجموعه جوابی در $h_M(A_M)$ می‌باشد. پس Σ دارای مجموعه جوابی در $g_M h_M(A_M)$ و در نتیجه در $h(colimA_i)$ می‌باشد.

گزارهٔ زیر همتای $(E5)$ در [۱] است.

نتیجه ۳۹. *رستهٔ $Pos - S$، $\mathcal{M}_{po}$- حد مستقیم دارد.*

اثبات: فرض کنید $h: A \to colim_\alpha B_\alpha = \coprod_\alpha B_\alpha/\rho$ حد مستقیم تکریختی‌های خالص مرتب جزیی $h_\alpha: A \to B_\alpha$، $\alpha \in I$، در رستهٔ $Pos - S$ با نگاشت‌های جهت‌دار $g_{\alpha\beta}: B_\alpha \to B_\beta$، $\alpha \leq \beta$، و نگاشت‌های هم‌حدی $g_\alpha: B_\alpha \to colim_\alpha B_\alpha$ باشد. چون $h = colim_\alpha h_\alpha = g_\gamma h_\gamma = g_\alpha h_\alpha = g_\beta h_\beta = \cdots$ و هر h_α تکریختی منظم مرتب جزیی است، طبق نتیجه ۲ از مرجع [۱۴]، h تکریختی منظم مرتب جزیی است. نشان می‌دهیم h، خالص است. مجموعه

$$\Gamma = \{id: A_i \to B_j | i \in I\backslash\{j\}, A_i = A = A_j\}$$

را در نظر بگیرید. واضح است که Γ یک دستگاه جهتدار و $colimA_i = \coprod A_i$. طبق قضیه ۳۸، همریختی هم حدی $h': \coprod A_i \to colimB_i$ یک تکریختی منظم خالص است. از طرف دیگر به وضوح نگاشت‌های کانونی $id: A_i \to B_j$ نیز تکریختی منظم خالص می‌باشند. بنابراین طبق لم ۲۲، $h = h'id_\alpha: A_\alpha = A \to colimB_\alpha$ تکریختی منظم خالص می‌باشد.

تعریف ۴۰. گوییم رستهٔ $\mathcal{A}$ در شرط $\mathcal{M}$- *زنجیر*[1] صدق می‌کند اگر به ازای هر سیستم مرتب جزیی جهت‌دار $((A_\alpha)_{\alpha\in I}, (f_{\alpha\beta})_{\alpha\leq\beta\in I})$ که مجموعهٔ اندیس I یک زنجیر خوش ترتیب با کوچکترین عضو 0 است و به ازای هر $\alpha \in I$ ، $f_{0\alpha} \in \mathcal{M}$، یک خانواده مانند $(g_\alpha: A_\alpha \to A)_{\alpha\in I}$ (معروف به کران بالا) با شرایط $h_0 \in \mathcal{M}$ و $g_\beta f_{\alpha\beta} = g_\alpha$ وجود داشته باشد.

قضیه ۴۱: *رستهٔ $Pos - S$ در شرط $\mathcal{M}_{po}$- زنجیر صدق می‌کند.*

اثبات: قرار دهید $A = colim_\alpha A_\alpha$ و فرض کنید $g_\alpha: A_\alpha \to A$ها نگاشت‌های هم‌حدی باشند. در این صورت با اعمال گزارهٔ ۳۹ نتیجه به دست می‌آید.

1. $\mathcal{M}$- chain condition

فهرست منابع

[1] Banaschewski, B. *Injectivity and essential extensions in equational classes of algebras*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math. **25** (1970), 131-147.

[2] Barzegar, H., Ebrahimi, M.M. *Sequential pure monomorphism of acts over semigroups*, European journal of pure and applied mathematics. **1**(4), 2009, 91-99.

[3] Barzegar, H., Ebrahimi, M.M., Mahmoudi, M. *Essentiality and Injectivity*, Applied Categorical Structure, **2008,** DOI 10.1007/s10485-008-9165-0.

[4] Berthiaume, P. *The injective envelope of S-Sets*, Canad. Math. Bull. **10**(2) (1967), 261-273.

[5] Bulman-Fleming, S., Laan, V. Lazard's theorem for *S*-posets. Math. Nachr. **278**(15), 1743-1755 (2005)

[6] Bulman-Fleming, S and Mahmoudi, M. *The category of S-posets*, Semigroup Forum **71**(2005), 443-461.

[7] Dikranjan, D., Tholen, W. *Categorical structure of closure operators, with applications to topology, algebra, and discrete mathematics*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publ., 1995.

[8] Ebrahimi, M.M., Mahmoudi, M., *The category of M-sets*, Ital. J. Pure Appl. Math. **9** (2001), 123-132.

[9] Gould, V. *The characterisation of monoids by properties of their S-systems*, Semigroup Forum **32**(3) (1985), 251-265.

[10] Gould, V. *Completely right pure monoids*. Proc.Roy. Irish Acad, Sect A, 87:73-82, 1987.

[11] Howie, J.M. *Fundamentals of semigroup theory*, Oxford Science Publications, Oxford, 1995.

[12] Kilp, M., Knauer, U., Mikhalev, A. *Monoids, Acts and Categories*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2000.

[13] Normak, P. *Purity in the category of M-sets*, Semigroup Forum **20**(2) (1980), 157-170.

[14] Rasouli, H. *Categorical properties of regular monomorphisms of S-posets*, Europ. J. Pure Appl. Math. **7**(2) (2014), 166-178.

[15] Taylor, W. Residually small varieties. *Algebra Univ.* **1972**, *2*, 33-53.

[16] Tholen, W. Injective objects and cogenerating sets. *J. alg.* **1981**, *73* (1), 139-155.