

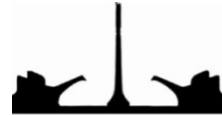
دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال سوم، شماره دهم، تابستان ۱۳۹۶

شماره شاپا: ۱۶۹+۱۶۸۲

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

خواص رسته‌های تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزئی

حسن برزگر*

گروه ریاضی، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۲/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۳/۲۱

چکیده

فرض کنیم \mathcal{M} یک خانواده از تکریختی‌ها در رسته \mathcal{A} باشد. برای مطالعه مفاهیم ریاضی مانند انژکتیوی، ضرب تانسوری و یکدست بودن نیاز به اطلاعات رسته‌ای و جبری زوج $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ داریم. در این مقاله \mathcal{A} را رسته $Pos - S$ از S -مجموعه‌های مرتب جزئی روی نیم گروه مرتب S و $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{po}$ را خانواده تمام تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزئی در نظر می‌گیریم. هدف اصلی مطالعه خواص رسته‌ای حدها و هم حدها برای تکریختی‌های مذکور است.

واژه‌های کلیدی: S -مجموعه مرتب جزئی، تکریختی‌های خالص مرتب جزئی، حدها، هم حدها.

۱. مقدمه

kilp, Fleming ... و ریاضیدانان ایرانی نظیر پروفیسور محمد مهدی ابراهیمی، مژگان محمودی، اکبر گلچین، غلامرضا مقدسی، لیلا شهباز، حمید رسولی و ... همانطور که می‌دانیم محک بیر در رسته مدولها برقرار است ولی در رسته S -سیستم‌ها و S -مجموعه‌های مرتب جزئی در حالت کلی برقرار نیست. در نتیجه تکریختی‌های مختلفی تاکنون تعریف شده‌اند و محک بیر برای آنها بررسی شده است. تکریختی‌هایی که ما در اینجا معرفی می‌کنیم نیز می‌تواند در نهایت به بررسی چنین محکی برای S -مجموعه‌های مرتب جزئی انژکتیو آن منجر شود.

۲. تعاریف و مقدمات

در این فصل ابتدا به معرفی مجموعه‌های مرتب جزئی پرداخته و مفاهیم بنیادین آن از قبیل کرانداری و جهت‌داری معرفی شده است. سپس به طور خلاصه به تعریف رسته $S - Act$ از S -سیستم‌های راست پرداخته و برخی از مفاهیم رسته‌ای و جبری $S - Act$ را بیان می‌کنیم و در آخر بطور خلاصه رسته $Pos - S$ از S -مجموعه‌های مرتب جزئی معرفی شده است.

تعریف ۲. رابطه دوتایی \leq روی مجموعه A را یک رابطه ترتیب جزئی (ترتیب) می‌نامیم هرگاه \leq انعکاسی، پادتقارنی و متعددی باشد. در این صورت (A, \leq) ، یا به طور ساده A ، را یک مجموعه مرتب جزئی (مرتب) می‌نامیم. همچنین اگر (A, \leq) یک مجموعه مرتب باشد، می‌گوییم (A, \leq) یک مجموعه مرتب کلی است هرگاه برای هر دو عضو $a, b \in A$ ، داشته باشیم $a \leq b$ یا $b \leq a$. هر مجموعه مرتب کلی را یک زنجیر می‌نامیم.

تعریف ۳. فرض کنیم P یک مجموعه مرتب باشد. هر زیرمجموعه Q از P همراه با تحدید ترتیب P روی Q را یک زیرمجموعه مرتب از P می‌نامیم.

زیرمجموعه مرتب D از مجموعه مرتب P را یک مجموعه پایینی نامیم هرگاه $a \leq b \in D$ نتیجه دهد $a \in D$. فرض کنیم (A, \leq) و (B, \leq') دو مجموعه مرتب و $f: A \rightarrow B$ تابع باشد. می‌گوییم f حافظ ترتیب (یکنوا) است هرگاه، اگر در A ، $a_1 \leq a_2$ آنگاه $f(a_1) \leq' f(a_2)$. همچنین f را یک نشاندۀ ترتیبی

در این مقاله رسته $Pos - S$ را رسته تمام S -مجموعه‌های مرتب جزئی روی نیم‌گروه S و M_{po} را خانواده تمام تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزئی که به صورت زیر تعریف می‌شود در نظر بگیریم.

تعریف ۱. زیر S -مجموعه مرتب جزئی A را در B ، خالص مرتب جزئی نامیم اگر هر دستگاه متناهی از نامعادلات که در B حلپذیر باشد، در A نیز حلپذیر باشد. تکریختی $f: A \rightarrow B$ را یک تکریختی خالص مرتب جزئی گوییم اگر $f(A)$ یک زیر S -مجموعه مرتب جزئی از B باشد.

در اینجا قصد داریم خواص رسته‌ای چنین تکریختی‌هایی از قبیل خواص ترکیبی، حدها و هم‌حدهای آن را بررسی کنیم. این خواص معمولاً برای مطالعه مفاهیم همولوژیکی مانند انژکتیوی و پروژکتیوی S -سیستم‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در ابتدا خلاصه‌ای در مورد مفاهیمی چون مجموعه مرتب جزئی، نیم‌گروه، S -سیستم و S -مجموعه مرتب جزئی را که مورد نیاز است بیان می‌کنیم.

در بخش دوم خواص رسته‌ای تکریختی خالص مرتب جزئی از قبیل خواص ترکیبی، حدها و هم‌حدها مورد مطالعه قرار گرفته است.

اشیا انژکتیو یکی از مهمترین اشیا در تمامی شاخه‌های جبر می‌باشد. این اشیا را نسبت به رسته خاصی از تکریختی‌ها تعریف می‌کنند. بنابر این بررسی خواص رسته‌ای این نوع تکریختی‌ها اهمیت پیدا می‌کند.

پرسش اساسی که در اینگونه تکریختی‌ها وجود دارد این است که کدام یک خواص شناخته شده، از قبیل خواص رسته‌ای، خواص همولوژیکی و محک بیر که در انواع مختلف انژکتیوی در رسته‌های گوناگون بررسی شده است، در این نوع تکریختی‌ها برقرار می‌باشد.

در حدود سال ۱۹۶۰، Berkheum شیء انژکتیو را در رسته S -سیستم‌ها تعریف و خواص رسته‌ای آن را بررسی کرد. بعد از آن افراد زیادی به بررسی خواص همولوژیکی و محک بیر آن و همچنین انواع خاصتر شیء انژکتیو در این رسته پرداختند. افرادی نظیر Normak, Bulman, Knower, Gould, Skornjakov

$S \in S$ شرط $as = a$ برقرار باشد. فرض کنید A' یک زیرمجموعه از A باشد. در این صورت A' یک زیر سیستم A نامیده می‌شود، و با نماد $A' \leq A$ نمایش داده می‌شود، هرگاه برای هر $a' \in A'$ و هر $s \in S$ داشته باشیم $a's \in A'$. همچنین A یک توسیع A' نامیده می‌شود. هر نیم‌گروه S با عمل دو تایی خود به عنوان کنش، خود یک S -سیستم است. با الحاق همانی خارجی $1 \cup S$ به نیم‌گروه‌ی که عضو همانی ندارد تکواره $\{1\} \cup S$ به دست می‌آید که با S^1 نمایش داده می‌شود.

تعریف ۵. نگاشت $f: A \rightarrow B$ بین دو S -سیستم A و B یک S -نگاشت یا S -همریختی گفته می‌شود اگر، به ازای هر $s \in S$ و هر $a \in A$ $f(as) = f(a)s$ همریختی $f: A \rightarrow B$ یکریختی نامیده می‌شود اگر، هم یک به یک و هم پوشا باشد. در این صورت گفته می‌شود که A و B یکریخت هستند و با نماد $A \cong B$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۶. فرض کنید A یک S -سیستم باشد. یک رابطه هم‌ارزی ρ روی A یک هم‌نهشتی S -سیستمی یا هم‌نهشتی روی A نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $a, a' \in A$ و $s \in S$ ، $asa' \rho$ نتیجه دهد $aspa's$ در این صورت A/ρ با عمل طبیعی $[a]_s \rho = [as]_s$ ، به ازای هر $s \in S$ یک S -سیستم راست است که سیستم خارج قسمتی A توسط ρ نامیده می‌شود. همریختی $\pi_\rho: A \rightarrow A/\rho$
 $a \mapsto [a]_\rho$

برورریختی کانونی نامیده می‌شود.

تعریف ۷. فرض کنید $f: A \rightarrow B$ یک S -نگاشت باشد. در این صورت هم‌ارزی هسته f ، $kerf$ ، که به ازای هر $a, a' \in A$ به صورت $a, a' \in a(kerf)a'$ اگر و تنها اگر $f(a) = f(a')$ تعریف می‌شود یک هم‌نهشتی روی سیستم‌ها است و هم‌نهشتی هسته f نامیده می‌شود. حال به معرفی رسته $Pos-S$ از S -مجموعه‌های مرتب می‌پردازیم. همچنین، ویژگی‌های رسته‌ای این رسته را که در این مقاله مورد نیاز هستند یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۸. تکواره (نیم‌گروه، گروه) S را یک تکواره (نیم‌گروه، گروه) مرتب می‌نامیم هرگاه S یک مجموعه

(نشاندن) می‌نامیم هرگاه برای هر $a_1, a_2 \in A$ ، $a_1 \leq a_2$ اگر و فقط اگر $f(a_1) \leq f(a_2)$.

عضو $a \in A$ ماکسیمم (می‌نیمم) گوییم، هرگاه برای هر $b \in A$ داشته باشیم $b \leq a$ ($a \leq b$). عضو ماکسیمم را با نماد \top (\perp) نمایش می‌دهیم.

یک گروهواره (یک مجموعه با یک عمل دو تایی) با ضرب شرکت‌پذیر یک نیم‌گروه نامیده می‌شود. یک نیم‌گروه با عضو همانی 1 ، تکواره نامیده می‌شود. عضو Z از نیم‌گروه S یک صفر راست گفته می‌شود هرگاه به ازای هر $s \in S$ داشته باشیم $sZ = Z$ ، همچنین عضو $Z \in S$ یک صفر چپ گفته می‌شود هرگاه به ازای هر $s \in S$ داشته باشیم $Zs = Z$. یک عضو صفر S عضوی مانند 0 از S است که هم صفر راست و هم صفر چپ باشد. نیم‌گروه S را که هر عضو آن یک صفر چپ باشد یک نیم‌گروه صفر چپ گویند.

کنش یک نیم‌گروه روی یک مجموعه همواره ابزار مفیدی برای مطالعه ساختارهای ریاضی بوده است، اخیراً نیز مورد علاقه برخی از کسانی شده است که در زمینه علوم کامپیوتر کار می‌کنند. در ادامه به طور خلاصه اجزاء تشکیل دهنده این رسته را بیان خواهیم کرد (برای اطلاعات بیشتر [۸]، [۱۱] و [۱۲] را ببینید).

تعریف ۴. فرض کنید S یک نیم‌گروه و A یک مجموعه باشد. اگر نگاشت

$$\mu: A \times S \rightarrow A$$

$$(a, s) \mapsto as := \mu(a, s),$$

که کنش S بر A نامیده می‌شود موجود باشد به قسمی که برای هر $a \in A$ و هر $s, t \in S$ داشته باشیم $a(st) = (as)t$ در این صورت A را یک S -سیستم (راست) یا یک سیستم (راست) روی S می‌نامیم. اگر S یک تکواره با عضو همانی 1 باشد در این صورت معمولاً نیاز است که شرط $a1 = a$ نیز برای هر $a \in A$ برقرار باشد، در واقع هر S -سیستم، یک جبر $(A, (\mu_s)_{s \in S})$ است که $\mu_s: A \rightarrow A$ یک عمل یکانی است به طوری که به ازای هر $s, t \in S$ از $\mu_s \circ \mu_t = \mu_{st}$ ، به علاوه، اگر S عضو همانی 1 داشته باشد در این صورت فرض می‌کنیم $\mu_1 = id_A$. عضو $a \in A$ یک عضو ثابت یا یک عضو صفر در A نامیده می‌شود هرگاه برای هر

بتوان ترتیب‌های مختلفی را روی S -مجموعه A/θ قرار داد که هم‌ریختی طبیعی $A/\theta \rightarrow A$ حافظ ترتیب شود (θ یک هم‌نهشتی S -مجموعه‌های مرتب گردد).

مثال ۱۳. فرض کنیم $S = \{1\}$ و $A = \{a, b, T\}$ به طوری که a و b مقایسه‌پذیر نباشند. قرار می‌دهیم $\theta = \Delta$ (رابطه تساوی). به آسانی می‌توان دید که تحت سه ترتیب متمایز زیر روی A/Δ ، Δ یک هم‌نهشتی S -مجموعه‌های مرتب خواهد شد:

(۱) $[a]$ و $[b]$ مقایسه‌پذیر نباشند و $[T]$ بزرگترین عضو باشد،

$$(۲) [a] < [b] < [T]$$

$$(۳) [b] < [a] < [T]$$

یادآوری می‌کنیم [۱۲] که برای S -مجموعه A و $H \subseteq A \times A$ ، هم‌نهشتی S -مجموعه‌های تولید شده $\theta(H)$ روی A توسط H ، به صورت زیر توصیف می‌شود:

$a\theta(H)a'$ اگر و تنها اگر $a = a'$ یا به ازای عضوهایی مانند $s_i \in S$ و $(x_i, x'_i) \in H \cup H^{-1}$ ،
 $a = x_1s_1, x'_1s_1 = x_2s_2, \dots, x'_ns_n = a'$.
 برای مشخص‌سازی و توصیف $n, i = 1, \dots, n$ هم‌نهشتی‌های S -مجموعه‌های مرتب تولید شده توسط روابط دوتایی، ابتدا به تعریف زیر توجه می‌کنیم:

تعریف ۱۴. برای یک رابطه دوتایی R روی S -مجموعه مرتب A ، منظور از R زنجیر، رابطه‌ای مانند \leq_R روی A است به طوری که برای هر $a, a' \in A$ ،
 $a \leq_R a'$ اگر و تنها اگر عضوهایی مانند $a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n \in A$ وجود داشته باشند که
 $a \leq a_1Ra'_1 \leq \dots \leq a_nRa'_n \leq a'$

لم ۱۵. [۶] یک هم‌نهشتی S -مجموعه‌های θ روی S -مجموعه مرتب A ، یک هم‌نهشتی S -مجموعه‌های مرتب است اگر و تنها اگر برای هر $a, a' \in A$ ،
 $a \leq_\theta a' \leq_\theta a$ نتیجه دهد $a\theta a'$.

تعریف ۱۶. برای رابطه دوتایی H روی S -مجموعه مرتب A ، هم‌نهشتی S -مجموعه‌های مرتب القا شده $\nu(H)$ روی A توسط H به صورت زیر تعریف می‌شود:

مرتب باشد و ترتیب، با عمل دوتایی روی S سازگار باشد. به عبارت دیگر، $s \leq t$ و $s' \leq t'$ نتیجه دهد $ss' \leq tt'$. زیرمجموعه مرتب T از تکواره مرتب S را یک زیرتکواره مرتب می‌گوییم هرگاه $T^2 \subseteq T$.

تعریف ۹. فرض کنیم S یک تکواره مرتب و A یک مجموعه مرتب باشد. می‌گوییم A یک S -مجموعه (S -سیستم) مرتب راست است، هرگاه A یک S -مجموعه راست باشد به طوری که کنش S روی A ترتیب را حفظ کند. به بیان دیگر، برای هر $a, a' \in A$ و $s, s' \in S$ ،
 $a \leq a'$ و $s \leq s'$ نتیجه دهد $as \leq a's'$. هرگاه A و B دو S -مجموعه مرتب راست باشند و $f: A \rightarrow B$ یک تابع باشد، گوییم f یک هم‌ریختی S -مجموعه‌ای مرتب راست است هرگاه f یک هم‌ریختی S -مجموعه‌ای راست و حافظ ترتیب باشد. کلاس همه S -مجموعه‌های مرتب راست به همراه هم‌ریختی‌های بین آنها تشکیل یک رشته می‌دهند. این رشته را با $Pos-S$ نمایش می‌دهیم.

به طور مشابه می‌توان S -مجموعه مرتب چپ را نیز تعریف کرد. اما در سراسر این مقاله، S -مجموعه‌های مرتب راست را در نظر می‌گیریم و به اختصار، آنها را S -مجموعه مرتب می‌گوییم.

توجه ۱۰. هر تکواره مرتب S ، با عمل دوتایی خود به عنوان کنش، به وضوح یک S -مجموعه مرتب است.

تعریف ۱۱. زیرمجموعه مرتب B از S -مجموعه مرتب A را یک زیر S -مجموعه مرتب می‌نامیم هرگاه برای هر $b \in B$ و هر $s \in S$ ، داشته باشیم $bs \in B$. همچنین در این صورت، A یک توسعه B نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲. رابطه هم‌ارزی θ روی S -مجموعه مرتب A را یک هم‌نهشتی S -مجموعه‌های مرتب می‌نامیم هرگاه θ یک هم‌نهشتی S -مجموعه‌ها باشد با این خاصیت که S -مجموعه A/θ با یک ترتیب، به گونه‌ای تبدیل به یک S -مجموعه مرتب شود که هم‌ریختی طبیعی S -مجموعه‌ای $A/\theta \rightarrow A$ ، یک هم‌ریختی S -مجموعه‌ای مرتب گردد (برای هر $a, a' \in A$ ، $a \leq a'$ نتیجه دهد $[a] \leq [a']$).

مثال زیر نشان می‌دهد که برای یک S -مجموعه مرتب A و هم‌نهشتی S -مجموعه‌های θ روی A ، ممکن است

$Pos - S$ معرفی می‌کنیم.

گزاره ۱۹. فرض کنیم $D: I \rightarrow Pos - S$ یک نمودار باشد که برای هر $\alpha \in I = Obj I$ مجموعه مرتب A_α و همچنین به ازای هر $\alpha \rightarrow \beta \in Mor I$ همریختی S -مجموعه‌ای مرتب $g_{\alpha\beta}: A_\alpha \rightarrow A_\beta$ را مشخص می‌کند. در این صورت،

(i) حد D برابر است با $A = \lim A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha$ که در آن

$$E_\alpha = \{a = (a_\beta)_{\beta \in I} \in \prod_{\beta \in I} A_\beta : (\forall \beta \in I) g_{\alpha\beta} p_\alpha(a) = p_\beta(a)\},$$

و p_β و p_α و β آمین نگاشت‌های تصویری ضرب هستند. همچنین، همریختی‌های S -مجموعه‌ای مرتب A_α به صورت $q_\alpha := p_\alpha|_A: \lim A_\alpha \rightarrow A_\alpha$ تعریف می‌شوند.

(ii) همحد D برابر است با $colim A_\alpha :=$

$\coprod_{\alpha \in I} A_\alpha / \theta$ که در آن θ همنهشتی تولید شده توسط $H = \{(u_\alpha(a_\alpha), u_\beta g_{\alpha\beta}(a_\alpha)) : a_\alpha \in A_\alpha, \alpha \rightarrow \beta \in Mor I\}$ است. همریختی‌های S -مجموعه‌ای مرتب همحدی به صورت $g_\alpha :=$

u_α هستند که $u_\alpha: colim A_\alpha \rightarrow A_\alpha$ هستند که u_α ها نگاشت‌های هم‌ضربی بوده و $\gamma \theta$ برورریختی طبیعی خارج قسمتی است.

۳. خواص رسته‌ای تکریختی‌های خالص مرتب جزئی

جزئی

در این بخش فرض می‌کنیم \mathcal{A} خانواده S -سیستم‌های مرتب جزئی راست روی نیم‌گروه مرتب جزئی S و $Mono$ خانواده همه تکریختی‌های مرتب جزئی در رسته $Pos - S, \mathcal{M}_{po}$ خانواده تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزئی \mathcal{M}_{reg} خانواده همه تکریختی‌های منظم مرتب جزئی S -سیستم‌های مرتب راست باشند.

تکریختی‌های خالص در رسته $Act - S$ از S -سیستم‌ها روی نیم‌گروه S برای اولین بار توسط Gould در [۹] و [۱۰] تعریف شدند. در اینجا ما این مفهوم را به تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزئی در رسته $Pos - S$ تعمیم می‌دهیم. در واقع، تکریختی‌های خالص مرتب جزئی دیدگاه جدیدی نسبت به محک بئر

$a' \leq_{\alpha(H)} a$ اگر و تنها اگر $av(H)a'$

که در آن $aa(H)a'$ اگر و تنها اگر $a = a'$ یا

$$a = x_1 s_1, x'_1 s_1 = x_2 s_2, \dots, x'_n s_n = a',$$

به ازای $i = 1, \dots, n, (x_i, x'_i) \in H$ و $s_i \in S$

همچنین، رابطه ترتیب مورد نظر روی $A/v(H)$ به صورت زیر است:

اگر و تنها اگر $a' \leq_{\alpha(H)} a$ و $[a]_{v(H)} \leq [a']_{v(H)}$

می‌توان نشان داد که $v(H)$ کوچک‌ترین همنهشتی S -مجموعه‌های مرتب روی A است به طوری که برای هر $(x, x') \in H$ ، همچنین، $[x]_{v(H)} \leq [x']_{v(H)}$. همچنین، در حالت خاص، $\theta(H) = v(H \cup H^{-1})$ ، همنهشتی S -مجموعه‌های مرتب تولید شده $\theta(H)$ روی A توسط H (کوچک‌ترین همنهشتی S -مجموعه‌های مرتب روی A و شامل H) است.

در این قسمت، با استفاده از منبع [۶] برخی مفاهیم و خواص رسته‌ای S -مجموعه‌های مرتب را یادآوری می‌کنیم.

گزاره ۱۷. فرض کنیم $(A_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای از S -مجموعه‌های مرتب باشد. در این صورت،

(i) ضرب $(A_i)_{i \in I}$ در رسته $Pos - S$ عبارت است از حاصلضرب دکارتی آنها، $\prod_{i \in I} A_i$ ، با ترتیب مولفه‌ای و کنش مولفه‌ای اعضای S ، یعنی برای $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ و $s \in S$ ، $(a_i s)_{i \in I} = (a_i)_{i \in I} s$.

(ii) همضرب $(A_i)_{i \in I}$ در رسته $Pos - S$ عبارت است از اجتماع مجزای آنها، $\coprod_{i \in I} A_i$ ، با همان ترتیب موجود در A_i ها و کنش طبیعی اعضای S ، یعنی برای $s \in S$ و $a \in \coprod_{i \in I} A_i$ داریم $a \in A_i$ ، لذا as همان کنش تعریف شده در S -مجموعه مرتب A_i می‌باشد.

(iii) همضرب $(A_i)_{i \in I}$ در رسته $Pos - S$ عبارت است از اجتماع مجزای آنها، $\coprod_{i \in I} A_i$ ، با همان ترتیب موجود در A_i ها و کنش طبیعی اعضای S ، یعنی برای $s \in S$ و $a \in \coprod_{i \in I} A_i$ داریم $a \in A_i$ ، لذا as همان کنش تعریف شده در S -مجموعه مرتب A_i می‌باشد.

تعریف ۱۸. برای خانواده $\{A_i: i \in I\}$ از S -مجموعه‌های مرتب، که هر کدام دارای یک عضو صفر

منحصر به فرد θ هستند، جمع مستقیم، $\bigoplus_{i \in I} A_i$ ، به صورت زیر S -مجموعه مرتب حاصلضرب $\prod_{i \in I} A_i$ و شامل تمامی $(a_i)_{i \in I}$ به طوری که به ازای همه i ها به استثناء تعداد متناهی اندیس i در I ، $a_i = \theta$ تعریف می‌شود.

در اینجا ساختار کلی حدها و همحدها را در رسته

لم ۲۲. خانواده \mathcal{M}_{po} تحت ترکیب بسته است.

اثبات: فرض کنیم که $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ دو تکریختی خالص مرتب جزئی باشند. بدون اینکه از کلیت مساله کاسته شود می‌توان فرض کرد که f و g شمول باشند. فرض کنیم Σ دستگاهی متناهی از نامعادلات با ثابت‌های در A باشد که دارای مجموعه جوابی در C است. در نتیجه Σ دستگاهی با ثابت‌های در B است که جوابی در C دارد. بنابراین Σ جوابی در B و در نتیجه در A دارد.

نتیجه زیر نشان می‌دهد که \mathcal{M}_{po} حذف‌پذیر چپ است. به این معنی که برای تکریختی‌های f و g اگر $gf \in \mathcal{M}_{po}$ آنگاه $f \in \mathcal{M}_{po}$.

قضیه ۲۳. خانواده \mathcal{M}_{po} حذف‌پذیر چپ است.

اثبات: درستی حکم فوق به سادگی قابل بررسی است. مثال زیر نشان می‌دهد که حذف‌پذیری راست لزوماً برقرار نمی‌باشد.

فرض کنیم $S = \{s_1, s_2\}$ نیم گروه چپ صفر با ترتیب معمولی باشد. فرض کنیم $C = \{a, b, c\}$ یک زنجیر سه عضوی باشد بطوریکه a و c عناصر ثابت و عمل روی b بصورت $bs_1 = a, bs_2 = c$ تعریف شود. زیر S -مجموعه‌های مرتب جزئی $A = \{a\}$ و $B = \{a, c\}$ را در نظر بگیرید. واضح است که A زیر سیستم خالص مرتب جزئی از B است. دستگاه $\{xs_1 \leq a, xs_2 \geq c\}$ جوابی مانند $b \in C$ دارد، ولی جوابی در B ندارد. بنابراین C توسعه خالص B نمی‌باشد.

حال دو مثال از تکریختی خالص مرتب جزئی ارایه می‌دهیم که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال ۲۴. (i) عضو ثابت a_0 را در S -مجموعه مرتب جزئی A در نظر بگیرید. عضو θ را به آن تحت عمل $\theta s = a_0 s (s \in S)$ و رابطه $\theta \leq a$ اگر و تنها اگر $a_0 \leq a$ و نیز $\theta \geq a$ اگر و تنها اگر $a_0 \geq a$ الحاق کنید. در اینصورت A تکریختی خالص مرتب جزئی در A^θ است.

(ii) اگر A دارای عضو ثابت یا ماکسیمم و یا مینیمم باشد، در اینصورت A یک زیر سیستم خالص از A^θ است.

برای انژکتیوی سیستم‌ها به دست می‌دهند. فرض کنیم A یک S -مجموعه مرتب جزئی باشد. نامعادلات یک دستگاه از نامعادلات با ثابت‌های در A فقط می‌تواند به یکی از صورت‌های زیر باشد:

$xs \leq xt, xs \leq yt, xs \leq a, a \leq xs$
که در آن $a \in A$ و $s, t \in S$. پارامترهای x و y را متغیر، s و t را ضرایب و a را ثابت می‌نامیم. یک دستگاه از نامعادلات فوق مانند Σ را در یک S -مجموعه مرتب جزئی مانند B حلپذیر گوییم، اگر Σ در B دارای یک مجموعه جواب باشد.

تعریف ۲۰. زیر S -مجموعه مرتب جزئی A را در B ، خالص مرتب جزئی نامیم اگر هر دستگاه متناهی از نامعادلات با ثابت‌های در A که در B حلپذیر باشد، در A نیز حلپذیر باشد.

در سه زیر بخشی که می‌آیند برخی از خواص جبری و رشته‌ای رشته $Pos-S$ را نسبت به تکریختی‌های خالص مرتب جزئی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. خواص ترکیب، حد، و هم‌حد را در این بخش‌ها مطالعه می‌کنیم. این خواص ابزاری برای مطالعه انژکتیوی و مفاهیم همولوژی مربوط به \mathcal{M}_{po} می‌باشند.

۱.۳. خواص ترکیبی تکریختی‌های خالص مرتب جزئی

در این زیر بخش تعدادی از خواص کلاس \mathcal{M}_{po} ، به ویژه خواص مربوط به ترکیب تکریختی‌های خالص مرتب جزئی را به دست می‌آوریم. این خواص و خواصی که در ادامه بخش می‌آیند برای مطالعه انژکتیوی مورد نیازند.

توجه ۲۱. مشاهده می‌کنید که همه یکریختی‌ها مرتب جزئی، خالص هستند و ترکیب یک یکریختی با یک تکریختی خالص مرتب جزئی، یک تکریختی خالص مرتب جزئی است.

خانواده \mathcal{M}_{po} را تحت ترکیب بسته گوییم، اگر ترکیب هر دو تکریختی خالص مرتب جزئی یک تکریختی خالص مرتب جزئی باشد.

همانطور که در ادامه خواهیم دید کلاس \mathcal{M}_{po} همواره تحت ترکیب بسته است.

بطوریکه θ عضو ثابتی است که در ارتباط با دیگر عناصر A نمی‌باشد.

۲.۳. حد تکریختی‌های خالص مرتب جزئی

در این زیر بخش رفتار تکریختی‌های خالص مرتب جزئی را نسبت به حدها مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا توجه کنید که خانواده \mathcal{M} را تحت ضرب، هم‌ضرب و جمع مستقیم بسته گوییم، اگر برای هر خانواده از تکریختی‌های خالص مرتب جزئی مانند $\{f_i: A_i \rightarrow B_i: i \in I\}$ نگاشت القایی ضرب، هم‌ضرب و جمع مستقیم، تکریختی خالص مرتب جزئی باشد.

قضیه ۲۵. (i) \mathcal{M}_{po} تحت ضرب بسته است.

(ii) فرض کنیم $\{f_i: A \rightarrow B_i: i \in I\}$ یک خانواده از تکریختی‌های خالص مرتب جزئی باشد. در اینصورت همریختی القایی $f: A \rightarrow \prod B_i$ نیز تکریختی خالص مرتب جزئی است.

اثبات: فرض کنید $\{f_i: A_i \rightarrow B_i: i \in I\}$ یک خانواده از تکریختی‌های خالص مرتب جزئی باشد. نمودار جابجایی زیر را به ازای هر $i \in I$ در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} A_i & \xrightarrow{f} & \prod_{i \in I} B_i \\ p_i \downarrow & & \downarrow p_i \\ A_i & \xrightarrow{f_i} & B_i \end{array}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که:

$$f = (f_i)_{i \in I}: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$$

یک تکریختی خالص مرتب جزئی است. فرض کنیم Σ در $\prod_{i \in I} B_i$ حلپذیر باشد و $[\Sigma]$ مجموعه نامساوی‌های آن بعد از جایگذاری مجموعه جواب آن باشد. طبق گزاره ۲ از مرجع [۱۴]، f یک تکریختی منظم است. به ازای هر $j \in J$ مجموعه Σ_j را نامساویهایی در A_j در نظر می‌گیریم که از j -مین مولفه نامعادلات در Σ بدست آمده باشند. چون هر A_j در B_j خالص است و Σ_j جوابی در B_j دارد، پس Σ_j جوابی در A_j و در نتیجه Σ جوابی در A دارد.

اثبات قسمت دوم مانند اثبات قسمت اول است.

خانواده تکریختی‌های خالص مرتب جزئی را تحت \mathcal{M}_{po} -عقب‌برها بسته گوییم، اگر عقب‌بر یک تکریختی خالص مرتب جزئی در طول یک مورفیسیم دوباره خالص است. مثال زیر نشان می‌دهد کلاس تکریختی‌های خالص مرتب جزئی تحت \mathcal{M}_{po} -عقب‌برها بسته نمی‌باشد.

مثال ۲۶. خانواده تکریختی‌های خالص مرتب جزئی تحت \mathcal{M}_{po} -عقب‌برها بسته نمی‌باشد.

S -مجموعه مرتب جزئی $B = \{a, b, c\}$ که در آن تمامی عناصر ثابت هستند و روابط $c \leq b$ و $c \leq a$ بین عناصر آن برقرار است را در نظر بگیرید. واضح است که $A = \{a, b\}$ در B خالص نیست، زیرا دستگاه $\Sigma = \{xs \leq a, xs \leq b\}$ دارای جواب $c \in B$ است ولی در A جواب ندارد. حال به سادگی دیده می‌شود که $D = \{d, e\}$ یک توسیع خالص از $C = \{e\}$ است. اکنون نمودار زیر:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tau} & B \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{\tau'} & D \end{array}$$

که در آن $f(a) = f(b) = e$ و $f(c) = d$ ، یک نمودار عقب‌بر می‌باشد، زیرا $f^{-1}(C) = A$.

قضیه ۲۷. (i) \mathcal{M}_{po} تحت حد بسته است.

(ii) فرض کنیم $\{f_i: A \rightarrow B_i: i \in I\}$ یک خانواده از تکریختی خالص مرتب جزئی باشد. در اینصورت همریختی القایی $f: A \rightarrow \lim_i B_i$ نیز تکریختی خالص مرتب جزئی است.

اثبات: فرض کنید $\mathcal{A}, \mathcal{B}: I \rightarrow Pos - S$ دیاگرام‌هایی در $Pos - S$ باشند که به ازای هر $\alpha \in I = Obj I$ سیستم‌های A_α و B_α ، و به ازای هر $\alpha \rightarrow \beta \in Mor I$ نگاشت‌های $g_{\alpha\beta}: A_\alpha \rightarrow A_\beta$ و $g'_{\alpha\beta}: B_\alpha \rightarrow B_\beta$ را نسبت می‌دهند. حد این دیاگرام‌ها را با نگاشت‌های حدی $q_\alpha: \lim_\alpha A_\alpha \rightarrow A_\alpha$ و $q'_\alpha: \lim_\alpha B_\alpha \rightarrow B_\alpha$ در نظر بگیرید. فرض کنید $\{f_\alpha: A_\alpha \rightarrow B_\alpha: \alpha \in I\}$ یک خانواده از تکریختی‌های خالص مرتب جزئی باشد.

نظر بگیریم. چون $\coprod (B_i)$ دارای ترتیب مؤلفه‌ای است، $[\Sigma]$ را می‌توان به زیر مجموعه‌های $[\Sigma_i]$ افزاز کرد بطوریکه هر Σ_i یک مجموعه از نامعادلات با جواب‌های در B_i باشد. حال چون A_i در B_i خالص است، هر Σ_i جوابی در A_i و در نتیجه Σ جوابی در $\coprod A_i$ دارد.

تعریف ۲۹. رسته \mathcal{A} و زیر کلاس \mathcal{M} از تکریختی مرتب جزئی‌ها را در نظر بگیرید. گفته می‌شود که رسته \mathcal{A} در ویژگی \mathcal{M} -انتقال صدق می‌کند اگر برای هر $f \in \mathcal{A}$ و هر $m \in \mathcal{M}$ با دامنه مشترک، نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccc} & m & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ & u & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \end{array}$$

وجود داشته باشد که $u \in \mathcal{M}$.

مفهوم \mathcal{M} -انتقال توسط افرادی که جبر جامع کار می‌کنند به کار برده می‌شود ([۱۵]) در حالی که کسانی که نظریه رسته کار می‌کنند ترجیح می‌دهند از ویژگی "رها توسط جلوبرها حفظ می‌شوند" یا "جلوبرها \mathcal{M} ها را منتقل می‌کنند" استفاده کنند. در صورتی که جلوبرها وجود داشته باشند و \mathcal{M} حذف‌پذیر چپ باشد این دو مفهوم با هم یکی هستند.

لم زیر را از [۱۴] می‌آوریم:

لم ۳۰. جلوبرها در رسته $Pos - S$ تکریختی‌های منظم مرتب جزئی را منتقل می‌کنند.

گزاره زیر همتای (E4) در [۱] است.

قضیه ۳۱. جلوبرها در رسته $Pos - S$ تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزئی را منتقل می‌کنند.

اثبات: بنابر لم قبل، جلوبرها تکریختی‌های منظم مرتب جزئی را منتقل می‌کنند، پس کفایت نشان دهیم که جلوبرها مورفیس‌های خالص را منتقل می‌کنند. نمودار جلوبری زیر را که در آن $f \in \mathcal{M}_{po}$ و $q_C = \gamma u_C: C \rightarrow (B \amalg C)/\theta$ و $q_B = \gamma u_B: B \rightarrow (B \amalg C)/\theta$ بروریختی‌های طبیعی، و $u_B: B \rightarrow B \amalg C$ و $u_C: C \rightarrow B \amalg C$ نگاشت‌های هم‌ضربی هستند، و رابطه هم‌نهستی روی $B \amalg C$ تولید شده توسط $H = \{(u_B f(a), u_C g(a)): a \in A\}$ است در نظر بگیرید.

نشان می‌دهیم $f = \lim_{\alpha} f_{\alpha}: \lim_{\alpha} A_{\alpha} \rightarrow \lim_{\alpha} B_{\alpha}$ یک تکریختی خالص مرتب جزئی است. نمودار

$$\begin{array}{ccccc} \lim_{\alpha} A_{\alpha} & \xrightarrow{q_{\alpha}} & A_{\alpha} & \xrightarrow{g_{\alpha\beta}} & A_{\beta} \\ \downarrow f & & \downarrow f_{\alpha} & & \downarrow f_{\beta} \\ \lim_{\alpha} B_{\alpha} & \xrightarrow{q'_{\alpha}} & B_{\alpha} & \xrightarrow{g_{\alpha\beta}} & B_{\beta} \end{array}$$

را در نظر بگیرید. طبق لم ۱ از مرجع [۱۴]، f یک تکریختی منظم است. فرض کنیم دستگاه Σ با ثابت‌های در $f(A)$ جوابی در $\lim_{\alpha} B_{\alpha}$ داشته باشد. به ازای هر نامعادله در Σ ، نا معادله‌ای با ثابت‌های در $f_i(A)$ می‌توان ساخت که جوابی در B_i داشته باشد. بنابراین به ازای هر i دستگاهی مانند Σ_i از نا معادلات با ثابت‌های در $f_i q_i(\lim_i A_i)$ داریم که جوابی در B_i دارد. حال چون f_i ها تکریختی خالص مرتب جزئی هستند، Σ_i مجموعه جوابی در $f_i q_i(\lim_i A_i)$ دارد. چون $q'_i f = f_i q_i$ پس Σ جوابی در $f(\lim_i A_i)$ دارد. اثبات قسمت دوم مانند اثبات قسمت اول است.

۳.۳. هم‌حد تکریختی‌های خالص مرتب جزئی

در این زیربخش رفتار تکریختی‌های خالص مرتب جزئی را نسبت به هم‌حدها مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

قضیه ۲۸. \mathcal{M}_{po} تحت هم‌ضرب بسته است.

اثبات: فرض کنید $\{f_i: A_i \rightarrow B_i: i \in I\}$ یک خانواده از تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزئی باشد. نمودار جابجایی زیر را به ازای هر $i \in I$ در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{f_i} & B_i \\ u_i \downarrow & & \downarrow u'_i \\ \prod_{i \in I} A_i & \xrightarrow{f} & \prod_{i \in I} B_i \end{array}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $f: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ یک تکریختی منظم خالص مرتب جزئی است. چون هر f_i تکریختی منظم مرتب جزئی است، طبق گزاره ۵ از مرجع [۱۴]، f تکریختی منظم مرتب جزئی است. همچنین f خالص است، زیرا فرض کنیم Σ دستگاهی متناهی از نامعادلات با ثابت‌های در $f(\prod A_i)$ باشد که دارای مجموعه جوابی در $\prod (B_i)$ است. مجموعه $[\Sigma]$ را مجموعه نامعادلات Σ بعد از جایگذاری جواب‌ها در

(۲) با در نظر گرفتن $[(2, c_2)]_\theta s_2 \leq [(2, c_{2r})]$ یا $t_{21}, \dots, t_{2n_2} \in S$ و $(2, c_2 s_2) \leq (2, c_{2r})$ وجود $c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n_2}, d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n_2}$ دارند که $(c_{2i}, d_{2i}) \in H \cup H^{-1}, i = 1, \dots, n_2$ بطوریکه:

$$\begin{aligned} (2, c_2 s_2) &\leq c_{21} s_{21}, d_{21} s_{21} \leq \\ c_{22} s_{22}, d_{22} s_{22} &\leq c_{23} s_{23}, \dots, d_{2n_2} s_{2n_2} \leq \\ (2, c'_2). \end{aligned}$$

در اینصورت:

$$\begin{aligned} (2, c_2 s_2) &\leq \\ (2, g(a_{21}) s_{21}), (1, f(a_{21}) s_{21}) &\leq \\ (1, f(a_{22}) s_{22}), (2, g(a_{22}) s_{22}) &\leq \\ (2, g(a_{23}) s_{23}), \dots, (2, g(a_{2n_2}) s_{2n_2}) &\leq \\ (2, c'_2). \end{aligned}$$

(۳) برای نامساوی $[(1, b)]_\theta s_3 \leq [(2, c_4)]_\theta s_4$ یا $c_{41}, c_{42}, \dots, c_{4n}, d_{41}, d_{42}, \dots, d_{4n_4}$ و $t_1, \dots, t_n \in S$ که $(c_{4i}, d_{4i}) \in H \cup H^{-1}$ برای $i = 1, \dots, n_4$ وجود دارند بطوریکه:

$$\begin{aligned} (1, b) s_3 &\leq c_{41} s_{41}, d_{41} s_{41} \leq \\ c_{42} s_{42}, d_{42} s_{42} &\leq c_{43} s_{43}, \dots, d_{4n} s_{4n} \leq \\ (2, c_4 s_4). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} (1, b s_3) &\leq \\ (1, f(a_{41}) s_{41}), (2, g(a_{41}) s_{41}) &\leq \\ (2, g(a_{42}) s_{42}), (1, f(a_{42}) s_{42}) &\leq \\ (1, f(a_{43}) s_{43}), \dots, (2, g(a_{4n_4}) s_{4n_4}) &\leq \\ (2, c_4 s_4). \end{aligned}$$

از مطالب فوق نامساوی‌های $(2, c'_1) \leq (2, c_1 s_1)$ را $bs_3 \leq f(a_{41} s_{41})$ و $(2, c_2 s_2) \leq (2, c'_2)$ می‌توان نتیجه گرفت. بنابراین $\Sigma_1 = \{x s_3 \leq f(a_{41} s_{41})\}$ که دارای جواب b در B می‌باشد. حال چون f تکریمتی خالص است، Σ_1 دارای جوابی در $f(A)$ مانند $f(a)$ می‌باشد، یعنی داریم $f(a s_3) \leq f(a_{41} s_{41})$ که چون f منظم است نامساوی‌های $a s_3 \leq a_{41} s_{41}$ و $g(a s_3) \leq g(a_{41} s_{41})$ را می‌توان بدست آورد. حال با استفاده از (۳) زنجیر زیر از نامساوی‌ها حاصل می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow q_B \\ C & \xrightarrow{q_C} & (B \sqcup C) / \theta \end{array}$$

نشان می‌دهیم که $q_C \in \mathcal{M}_{p0}$ طبق لم ۳۰، q_C یک تکریمتی منظم مرتب جزئی است. حال نشان می‌دهیم خالص نیز می‌باشد. کفایت مساله را فقط برای حالتیکه

$$\begin{aligned} \Sigma = \{[(2, c'_1)]_\theta \leq x_1 s_1, x_2 s_2 \\ \leq [(2, c'_2)]_\theta, x_3 s_3 \\ \leq x_4 s_4\} \end{aligned}$$

یک مجموعه از نامعادلات با ضرایب در S و ثابت‌های در $q_C(C)$ باشد که دارای مجموعه جواب $\{(B \sqcup C) / \theta\}$ در $\{[d_1]_\theta, [d_2]_\theta, [d_3]_\theta, [d_4]_\theta\}$ است، بررسی کنیم. در اینصورت به ازای هر i ، یا $[d_i]_\theta \in q_C(C)$ و یا یک i وجود دارد که $[d_i]_\theta \in q_B(B)$.

در حالت اول $\{[d_1]_\theta, [d_2]_\theta, [d_3]_\theta, [d_4]_\theta\}$ یک مجموعه جواب برای Σ در $q_C(C)$ است و بنابراین حکم برقرار است. در حالت دوم، بدون اینکه از کلیت مساله کاسته شود می‌توان فرض کرد که:

$$\begin{aligned} [d_1]_\theta &= [(2, c_1)]_\theta, [d_2]_\theta \\ &= [(2, c_2)]_\theta, [d_4]_\theta \\ &= [(2, c_4)]_\theta \in q_C(C) \end{aligned}$$

و $[d_3]_\theta = [(1, b)]_\theta \in q_B(B)$ بنابراین باید مجموعه جوابی برای Σ در $q_C(C)$ بیابیم. هر یک از نامساوی‌های فوق را بطور مجزا بررسی می‌کنیم.

(۱) با در نظر گرفتن $[(2, c'_1)] \leq [(2, c_1)]_\theta s_1$ یا $t_{11}, \dots, t_{1n_1} \in S$ و $(2, c'_1) \leq (2, c_1 s_1)$ وجود $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n_1}$ دارند که $(c_{1i}, d_{1i}) \in H \cup H^{-1}, i = 1, \dots, n_1$ بطوریکه:

$$\begin{aligned} (2, c'_1) &\leq c_{11} s_{11}, d_{11} s_{11} \leq \\ c_{12} s_{12}, d_{12} s_{12} &\leq c_{13} s_{13}, \dots, d_{1n_1} s_{1n_1} \leq \\ (2, c_1 s_1). \end{aligned}$$

در اینصورت:

$$\begin{aligned} (2, c'_1) &\leq \\ (2, g(a_{11}) s_{11}), (1, f(a_{11}) s_{11}) &\leq \\ (1, f(a_{12}) s_{12}), (2, g(a_{12}) s_{12}) &\leq \\ (2, g(a_{13}) s_{13}), \dots, (2, g(a_{1n_1}) s_{1n_1}) &\leq \\ (2, c_1 s_1). \end{aligned}$$

پس
 $b_i = d_i(a_1) = d_i(a_2) = d_i(a_3) = d_i(a_n) = b'_i$.
 در مرجع [۱۴]، قضیه ۲، نشان داده شده است که
 جلوبرهای چندتایی، تکریختی‌های منظم مرتب جزئی را
 منتقل می‌کنند. همچنین روند اثبات انتقال خالص بودن
 تحت جلوبر چندتایی مانند روند اثبات در قضیه ۳۱
 می‌باشد. بنابراین جلوبرهای چندتایی، تکریختی‌های
 منظم خالص مرتب جزئی را منتقل می‌کنند.

نتیجه ۳۳: نگاشت قطری در جلوبرهای چندتایی،
 تکریختی‌های منظم خالص مرتب جزئی، تکریختی منظم
 خالص مرتب جزئی است.

اثبات: با بکار بردن قضایای ۲۲ و ۳۲ حکم براحتی
 بدست می‌آید.

تعریف ۳۴: گوئیم رسته \mathcal{A} - \mathcal{M} کران^۱ دارد اگر به
 ازای هر خانواده مانند $\{m_i: A \rightarrow B_i: i \in I\}$ از
 مورفیس‌ها در \mathcal{M} که با یک مجموعه اندیس گذاری
 شده‌اند یک \mathcal{M} -مورفیس مانند $m: A \rightarrow B$ وجود
 داشته باشد که روی تمامی m_i ها تجزیه شود، به این
 معنی که $d_i: A_i \rightarrow B$ ها وجود دارند که $d_i m_i = m$.

قضیه ۳۵: رسته $Pos - S$ ، \mathcal{M}_{po} -کران دارد.
اثبات: فرض کنید $\{h_\alpha: A \rightarrow B_\alpha: \alpha \in I\}$ یک
 خانواده از مورفیس‌ها در \mathcal{M}_{po} باشند که با یک
 مجموعه اندیس گذاری شده‌اند و $h: A \rightarrow B = \prod_{i \in I} B_i / \theta$
 جلوبر چندتایی h_α ها باشد. در این صورت
 h روی تمام h_α ها تجزیه می‌شود و بنابر گزاره ۳۲،
 خالص است.

تعریف ۳۶: گوئیم رسته \mathcal{A} ، خاصیت \mathcal{M} -ترکیب^۲
 دارد اگر مورفیس m در تعریف \mathcal{M} -کران، روی تمامی
 m_i ها توسط اعضای \mathcal{M} تجزیه شود، به این معنی که
 d_i ها متعلق به \mathcal{M} باشند.

قضیه ۳۷: رسته $Pos - S$ ، خاصیت \mathcal{M}_{po} -ترکیب
 دارد.

اثبات: چون بنابر گزاره ۳۲، جلوبرهای چندتایی،
 تکریختی‌های خالص مرتب جزئی را منتقل می‌کنند،
 اثبات انجام شده است.

$$\begin{aligned} (2, g(a)s_3) &\leq (2, g(a_{41})s_{41}) \\ &\leq (2, g(a_{42})s_{42}), (1, f(a_{42})s_{42}) \\ &\leq (1, f(a_{43})s_{43}), \dots, (2, g(a_{4n_4})s_{4n_4}) \\ &\leq (2, c_4s_4) \end{aligned}$$

و این یعنی $[(2, g(a))]_\theta s_3 \leq [(2, c_4)]s_4$
 بنابراین عناصر $[(2, c_1)]_\theta, [(2, c_2)]_\theta, [(2, g(a))]_\theta$
 و $[(2, c_4)]_\theta$ مجموعه جوابی برای Σ در $q_C(C)$
 می‌باشند. در نتیجه q_C یک تکریختی خالص مرتب
 جزئی می‌باشد.

قضیه ۳۲: جلوبرهای چندتایی، تکریختی‌های منظم
 خالص مرتب جزئی را منتقل می‌کنند.

اثبات: فرض کنید $\{d_i: A \rightarrow B_i: i \in I\}$ یک
 خانواده از تکریختی‌های خالص مرتب جزئی باشد.
 یادآوری می‌کنیم که جلوبر چندتایی این خانواده
 $(\prod_{i \in I} B_i) / \theta$ است که θ رابطهٔ هم‌نهستی روی
 $\prod_{i \in I} B_i$ تولید شده توسط تمامی زوج‌های
 $H = \{(u_i d_i(a), u_j d_j(a)): i, j \in I, a \in A\}$
 و به ازای هر $i \in I$ ، $u_i: B_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$
 i -آمین نگاشت هم‌ضربی است. همچنین، $d'_i =$
 $\gamma: \prod_{i \in I} B_i \rightarrow (\prod_{i \in I} B_i) / \theta$ نگاشت‌های جلوبری
 چندتایی هستند و $\gamma: \prod_{i \in I} B_i \rightarrow (\prod_{i \in I} B_i) / \theta$
 بروریختی طبیعی است.

ابتدا نشان می‌دهیم که به ازای هر $i \in I$ ، d'_i تکریختی
 مرتب جزئی است. فرض کنید برای $b_i \in B_i$ ، $b'_i \in$
 $(\prod_{i \in I} B_i) / \theta$ در این صورت $d'_i(b_i) = d'_i(b'_i)$
 و بنابرین یا $b_i = b'_i$ یا $(u_i(b_i), u_i(b'_i)) \in \theta$
 و $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ و $k_1, \dots, k_{n+2} \in I$ وجود
 دارند که

$$\begin{aligned} u_i(b_i) &= u_{k_1} d_i(a_1) \\ u_{k_2} d_{k_2}(a_1) &= u_{k_3} d_{k_3}(a_2) && \text{و} \\ u_{k_4} d_{k_4}(a_2) &= u_{k_5} d_{k_5}(a_3) && \text{و} \\ u_{k_{n+2}} d_{k_{n+2}}(a_n) &= u_i(b'_i) && \dots \end{aligned}$$

بنابراین
 $k_1 = i, k_2 = k_3, k_4 = k_5, \dots, k_{n+2} = i$
 و لذا، چون d_k تکریختی مرتب جزئی است.
 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \dots = a_{n-1} = a_n$
 $b_i = d_i(a_1)$ و

1. \mathcal{M} - bounds
2. \mathcal{M} - amalgamation property

در نظر بگیرید. فرض کنید $\{h_\alpha: A_\alpha \rightarrow B_\alpha: \alpha \in I\}$ یک خانواده از تکریختی‌های خالص باشد به طوری که $\{g_\alpha h_\alpha: A_\alpha \rightarrow \text{colim}_\alpha B_\alpha: \alpha \in I\}$ یک چاهک^۱ برای دیاگرام \mathcal{A} است. نشان خواهیم داد

$$h = \text{colim}_\alpha h_\alpha: \text{colim}(A_\alpha) \rightarrow \text{colim}(B_\alpha)$$

یک تکریختی خالص مرتب جزئی است. می‌دانیم θ همبستگی تولید شده توسط

$$H = \{(u_\alpha(a_\alpha), u_\beta \psi_{\alpha\beta}(a_\alpha)): a_\alpha \in A_\alpha, \alpha \rightarrow \beta \in \text{Mor} I\}$$

و θ' همبستگی تولید شده توسط

$$H' = \{(u'_\alpha(b_\alpha), u'_\beta g_{\alpha\beta}(b_\alpha)): b_\alpha \in B_\alpha, \alpha \rightarrow \beta \in \text{Mor} I\}$$

است. مشاهده می‌کنید که $h[u_\alpha(a_\alpha)]_\theta = [u'_\alpha h_\alpha(a_\alpha)]_{\theta'}$ چون هر h_α تکریختی منظم مرتب جزئی است، طبق قضیه ۳ از مرجع [۱۴]، h تکریختی منظم مرتب جزئی است. همچنین h خالص است، زیرا فرض کنیم Σ دستگاهی متناهی از نامعادلات با ثابت‌های در $h(\text{colim} A_\alpha)$ باشد که دارای مجموعه جوابی در $\text{colim}(B_\alpha)$ است.

(i) فرض کنیم $[b_i]_{\theta'} \in \text{colim} B_\alpha$ یک جواب برای نامعادله $xs \leq h[(a_j)]_\theta$ باشد. داریم $[b_i s]_{\theta'} \leq h[(a_j)]_\theta = [h_j(a_j)]_{\theta'}$ و در نتیجه $k \geq i, j$ وجود دارد که

$$\varphi_{ik}(b_i)s = \varphi_{ik}(b_i s) \leq \varphi_{jk}(h_j(a_j)) = h_k \psi_{jk}(a_j) \in B_k$$

چون h_k تکریختی خالص است، $a_k \in A_k$ وجود دارد که $h_k(a_k)s \leq h_k \psi_{jk}(a_j)$ بنابراین

$$h([(a_k)]_\theta)s = g_k h_k(a_k)s \leq g_k h_k \psi_{jk}(a_j) = g_j h_j(a_j) = h[(a_j)]_\theta$$

که نتیجه می‌دهد نامعادله دارای جواب $[h[(a_k)]_\theta]$ در $h(\text{colim} A_\alpha)$ می‌باشد.

(ii) مانند قسمت (i) می‌توان نشان داد هر نامعادله به صورت $xs \geq h[(a_j)]_\theta$ دارای جوابی در $h(\text{colim} A_\alpha)$ می‌باشد.

(iii) فرض کنیم $x = [b_i]_{\theta'}$ و $y = [b_j]_{\theta'}$ یک جواب برای نامعادله $xs \leq yt$ در $\text{colim} B_\alpha$ باشد. در اینصورت $[b_i s]_{\theta'} \leq [b_j t]_{\theta'}$ و در نتیجه $k \geq i, j$

در نهایت هم‌حدهای مستقیم تکریختی‌های منظم مرتب جزئی را در رسته $Pos - S$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. توجه کنید که یک دستگاه مستقیم از S - مجموعه‌های مرتب جزئی و هم‌ریختی‌های بین آنها یک خانواده مانند $\{A_i\}_{i \in I}$ از S - مجموعه‌های مرتب جزئی که با یک مجموعه جهت‌دار بالای اندیس شده است، به همراه یک خانواده $(\psi_{ij}: A_i \rightarrow A_j)_{i \leq j}$ از هم‌ریختی‌ها است بطوریکه به ازای هر $i \leq j \leq k$ ، $\psi_{ik} = \psi_{jk} \psi_{ij}$ و $\psi_{ii} = id$ زوج $(\text{colim} A_i, g_i: A_i \rightarrow \text{colim} A_i)$ را هم‌حد مستقیم دستگاه مستقیم $(\{A_i\}_{i \in I}, (\psi_{ij})_{i \leq j})$ می‌نامیم اگر برای هر $i \leq j$ داشته باشیم $g_i \psi_{ij} = g_j$ و برای هر $(B, f_i: A_i \rightarrow B)$ با شرط $f_j \psi_{ij} = f_i$ یک هم‌ریختی منحصر بفرد $v: \text{colim} A_i \rightarrow B$ وجود داشته باشد بطوریکه $v g_i = f_i$.

توجه کنید، به مرجع [۵] رجوع شود، که هم‌حد مستقیم دستگاه مستقیم $(\{A_i\}_{i \in I}, (\psi_{ij})_{i \leq j})$ وجود دارد و بصورت $(A/\theta, (g_i: A_i \rightarrow A/\theta)_{i \in I})$ می‌باشد بطوریکه

$$A = \coprod A_i \quad (۱)$$

(۲) $a \in A_i, a' \in A_j, a \theta a'$ اگر و تنها اگر $\exists k \geq i, j: \psi_{ik}(a) = \psi_{jk}(a')$

(۳) $a \in A_i, a' \in A_j, [a]_\theta \leq [a']_\theta$ اگر و تنها اگر $\exists k \geq i, j: \psi_{ik}(a) \leq \psi_{jk}(a')$

(۴) به ازای هر $i \in I$ و $a \in A$ داشته باشیم $g_i(a) = [a]_\theta$

قضیه ۳۸. کلاس تکریختی‌های خالص مرتب جزئی تحت هم‌حدها بسته است.

اثبات: فرض کنید $\mathcal{A}, \mathcal{B}: I \rightarrow Pos - S$ دیاگرام‌هایی در $Pos - S$ باشند که به ازای هر $\alpha \in I = Obj I$ ، سیستم‌های A_α و B_α ، و به ازای هر $\alpha \rightarrow \beta \in Mor I$ ، نگاشت‌های $\psi_{\alpha\beta}: A_\alpha \rightarrow A_\beta$ و $\varphi_{\alpha\beta}: B_\alpha \rightarrow B_\beta$ را نسبت می‌دهند. حد این دیاگرام‌ها را با نگاشت‌های هم‌حدی:

$$f_\alpha = \gamma_\theta: A_\alpha \rightarrow \text{colim}_\alpha A_\alpha = \coprod_\alpha A_\alpha / \theta$$

$$g_\alpha = \gamma_{\theta'}: B_\alpha \rightarrow \text{colim}_\alpha B_\alpha = \coprod_\alpha B_\alpha / \theta'$$

را در نظر بگیرید. واضح است که Γ یک دستگاه جهتدار و $colim A_i = \coprod A_i$ طبق قضیه ۳۸، هم‌ریختی هم‌حدی $h': \coprod A_i \rightarrow colim B_i$ یک تکریختی منظم خالص است. از طرف دیگر به وضوح نگاشت‌های کانونی $id: A_i \rightarrow B_j$ نیز تکریختی منظم خالص می‌باشند. بنابراین طبق لم ۲۲، $h = h' id_\alpha: A_\alpha = A \rightarrow colim B_\alpha$ تکریختی منظم خالص می‌باشد.

تعریف ۴۰. گوئیم رسته \mathcal{A} در شرط \mathcal{M} -زنجیر^۱ صدق می‌کند اگر به ازای هر سیستم مرتب جزئی جهت‌دار $((A_\alpha)_{\alpha \in I}, (f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I})$ که مجموعه اندیس I یک زنجیر خوش ترتیب با کوچکترین عضو 0 است و به ازای هر $\alpha \in I$ ، $f_{0\alpha} \in \mathcal{M}$ ، یک خانواده مانند $(g_\alpha: A_\alpha \rightarrow A)_{\alpha \in I}$ (معروف به کران بالا) با شرایط $g_\beta f_{\alpha\beta} = g_\alpha$ و $h_0 \in \mathcal{M}$ وجود داشته باشد.

قضیه ۴۱: رسته $Pos - S$ در شرط \mathcal{M}_{po} -زنجیر صدق می‌کند.

اثبات: قرار دهید $A = colim_\alpha A_\alpha$ و فرض کنید $g_\alpha: A_\alpha \rightarrow A$ نگاشت‌های هم‌حدی باشند. در این صورت با اعمال گزاره ۳۹ نتیجه به دست می‌آید.

وجود دارد که $\varphi_{ik}(b_i s) \leq \varphi_{jk}(b_j t)$ چون h_k تکریختی خالص است، $a_k, a'_k \in A_k$ وجود دارند که $h_k(a_k) s \leq h_k(a'_k) t$.

بنابراین

$$h([\langle a_k \rangle]_\theta) s = g_k h_k(a_k) s \leq g_k h_k(a'_k) t = h[a'_k]_\theta t$$

که نتیجه می‌دهد نامعادله دارای جواب در $h(colim A_\alpha)$ می‌باشد.

(iv) مانند قسمت (iii) می‌توان نشان داد هر نامعادله به صورت $xs \geq xt$ دارای جوابی در $h(colim A_\alpha)$ می‌باشد.

حال فرض کنیم Σ دارای n نامعادله باشد. در اثبات قسمت‌های فوق نشان داده شد که برای هر نامعادله در Σ یک $k_m \in I$ ($1 \leq m \leq n$) و $b, b' \in \varphi_{ik_m}(b) \leq \varphi_{jk_m}(b') \in B_K$ وجود دارند که چون مجموعه I جهت‌دار است، یک $M \in I$ ناکمتر از تمامی k_m ها وجود دارد. بنابراین

$$\varphi_{iM}(b) = \varphi_{k_m M} \varphi_{ik_m}(b) \leq \varphi_{k_m M} \varphi_{jk_m}(b') = \varphi_{jM}(b') \in B_M.$$

در نتیجه دستگاه نامعادلات Σ_M با ثابت‌های در $h_M(A_M)$ بدست می‌آید که دارای یک مجموعه جواب در B_M می‌باشد. حال چون h_M خالص است، Σ_M دارای مجموعه جوابی در $h_M(A_M)$ می‌باشد. پس Σ دارای مجموعه جوابی در $g_M h_M(A_M)$ و در نتیجه در $h(colim A_i)$ می‌باشد.

گزاره زیر همتای (E5) در [۱] است.

نتیجه ۳۹. رسته $Pos - S$ ، \mathcal{M}_{po} -حد مستقیم دارد.

اثبات: فرض کنید $h: A \rightarrow colim_\alpha B_\alpha = \coprod B_\alpha / \rho$ حد مستقیم تکریختی‌های خالص مرتب جزئی $h_\alpha: A \rightarrow B_\alpha$ ، $\alpha \in I$ در رسته $Pos - S$ با نگاشت‌های جهت‌دار $g_{\alpha\beta}: B_\alpha \rightarrow B_\beta$ ، $\alpha \leq \beta$ و نگاشت‌های هم‌حدی $g_\alpha: B_\alpha \rightarrow colim_\alpha B_\alpha$ باشد. چون $h = colim_\alpha h_\alpha = g_\gamma h_\gamma = g_\alpha h_\alpha = \dots = g_\beta h_\beta$ و هر h_α تکریختی منظم مرتب جزئی است، طبق نتیجه ۲ از مرجع [۱۴]، h تکریختی منظم مرتب جزئی است. نشان می‌دهیم h خالص است. مجموعه

$$\Gamma = \{id: A_i \rightarrow B_j | i \in I \setminus \{j\}, A_i = A = A_j\}$$

1. \mathcal{M} -chain condition

- [10] Gould, V. *Completely right pure monoids*. Proc.Roy. Irish Acad, Sect A, 87:73-82, 1987.
- [11] Howie, J.M. *Fundamentals of semigroup theory*, Oxford Science Publications, Oxford, 1995.
- [12] Kilp, M., Knauer, U., Mikhalev, A. *Monoids, Acts and Categories*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2000.
- [13] Normak, P. *Purity in the category of M -sets*, Semigroup Forum **20**(2) (1980), 157-170.
- [14] Rasouli, H. *Categorical properties of regular monomorphisms of S -posets*, Europ. J. Pure Appl. Math. **7**(2) (2014), 166-178.
- [15] Taylor, W. *Residually small varieties*. *Algebra Univ.* **1972**, 2, 33-53.
- [16] Tholen, W. *Injective objects and cogenerating sets*. *J. alg.* **1981**, 73 (1), 139-155.
- [1] Banaschewski, B. *Injectivity and essential extensions in equational classes of algebras*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math. **25** (1970), 131-147.
- [2] Barzegar, H., Ebrahimi, M.M. *Sequential pure monomorphism of acts over semigroups*, European journal of pure and applied mathematics. **1**(4), 2009, 91-99.
- [3] Barzegar, H., Ebrahimi, M.M., Mahmoudi, M. *Essentiality and Injectivity*, Applied Categorical Structure, **2008**, DOI 10.1007/s10485-008-9165-0.
- [4] Berthiaume, P. *The injective envelope of S -Sets*, Canad. Math. Bull. **10**(2) (1967), 261-273.
- [5] Bulman-Fleming, S., Laan, V. *Lazard's theorem for S -posets*. Math. Nachr. **278**(15), 1743-1755 (2005)
- [6] Bulman-Fleming, S and Mahmoudi, M. *The category of S -posets*, Semigroup Forum **71**(2005), 443-461.
- [7] Dikranjan, D., Tholen, W. *Categorical structure of closure operators, with applications to topology, algebra, and discrete mathematics*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publ., 1995.
- [8] Ebrahimi, M.M., Mahmoudi, M., *The category of M -sets*, Ital. J. Pure Appl. Math. **9** (2001), 123-132.
- [9] Gould, V. *The characterisation of monoids by properties of their S -systems*, Semigroup Forum **32**(3) (1985), 251-265.

