دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره دهم، تابستان ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی

روش آزاد سازی لاگرانژ برای مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای

علی محمودی‌راد[*1]، صادق نیرومند[2]، مسعود صانعی[3]، عبدالرحمان ساجدی نژاد[4]

(۱) استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجد سلیمان، گروه ریاضی، مسجدسلیمان، ایران
(۲) استادیار، موسسه آموزش عالی فیروزآباد، گروه مهندسی صنایع، فیروزآباد، فارس، ایران
(۳) دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، گروه ریاضی، تهران، ایران
(۴) استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجد سلیمان، گروه ریاضی، مسجدسلیمان، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۱/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۲/۲۸

چکیده

در این مقاله مساله حمل و نقل با هزینه ی ثابت مرحله‌ای توسعه داده شده است که محصولات از مبداها با هزینه مستقیم و ثابت مرحله‌ای به مقصدها فرستاده می‌شوند. مدل پیشنهادی، مقدار حمل کالاها در آن مسیرها را با هدف مینیمم نمودن هزینه‌ها (مجموع هزینه‌های مستقیم و ثابت مرحله‌ای) طوری تعیین می‌نماید که تقاضای هر مشتری نیز برآورده شود. چون این مساله از نوع مسائل چند جمله ای سخت است، نرم‌افزارهای بهینه‌سازی قادر به حل این مسأله در اندازه‌های کوچک و متوسط هستند. به منظور حل مسأله در اندازهای بزرگ، روش آزادسازی لاگرانژ را پیشنهاد می‌کنیم. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که روش آزادسازی لاگرانژ با شکاف بهینگی قادر به حل مسایلی با ابعاد بالاتر در مقایسه با نرم افزارهای بهینه سازی است.

واژه‌های کلیدی: ثابت مرحله‌ای، مسأله حمل و نقل، آزادسازی لاگرانژ.

---

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: alimahmoodirad@gmail.com

۱– مقدمه

مساله حمل و نقل با هزینه ثابت نوعی از مساله حمل و نقل است. این مساله ابتدا توسط هیرسش و دانتزیگ [۱] فرمولبندی شده است. در مساله حمل و نقل با هزینه ثابت، برای هر مسیر یک هزینه ثابت و یک هزینه حمل متغیر برای هر واحد کالای حمل شده وجود دارد. چون این مساله از نوع مسائل چند جمله‌ای سخت است [۲،۳،۴]، زمان محاسباتی برای بدست آوردن جواب های دقیق به صورت یک تابع چند جمله ای افزایش می‌یابد.

روش‌های حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت را می‌توان به سه دسته دقیق، ابتکاری و فراابتکاری تقسیم کرد. روش‌هایی مانند روش صفحه برش، روش رتبه‌بندی نقاط راسی و روش شاخه و کران مهمترین روش‌های دقیق برای حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت است. هیرسش و دانتزیگ [۱] ثابت کردند که ناحیه شدنی مساله حمل ونقل با هزینه ثابت یک مجموعه محدب کراندار است و تابع هدف آن یک مجموعه مقعر است. گری[۵] یک الگوریتم برای پیدا کردن جواب دقیق با تجزیه آن به یک مساله برنامه‌ریزی صحیح و یکسری زیر مساله حمل و نقل ارایه داد. این روش‌ها به دلیل حجم محاسباتی سنگین، ناکارا هستند.

محققین زیادی برای حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت با روش‌های ابتکاری تلاش کردند، اولین بار بالینسکی [۶] مساله حمل و نقل با هزینه ثابت را فرمولبندی نمود و یک روش ابتکاری– تقریبی برای حل این مساله ارایه کرد. کان و بامول [۷]، مورتی [۸]، دیابی [۹]، ساندروک [۱۰]، پالیکار و همکاران [۱۱]، سان و همکاران [۱۲]، ادلخا و همکاران [۲،۳و۴]، آنتونی راج و همکاران [۱۳] روش‌هایی بدست آوردن جواب مساله حمل و نقل با هزینه ثابت، توسعه دادند. روش آزادسازی لاگرانژ توسط رایت و دیگران [۱۴و۱۵] پیشنهاد شد، دیابی [۹] تکنیک تقریب خطی برای حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت را ارایه کرد. اگرچه روش های ابتکاری بطور محاسباتی معمولاً کارا هستند، اما ایراد اصلی روش‌های ابتکاری این است که امکان دارد در یک بهینه موضعی که خیلی از جواب بهینه دور است، خاتمه یابند.

روش‌های فراابتکاری مانند الگوریتم ژنتیک [۱۶،۱۷]، الگوریتم ایمنی مصنوعی و ژنتیک بر اساس درخت فراگیر [۱۷] نمونه‌هایی هستند که برای حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت پیشنهاد شده است.

در مساله حمل و نقل با هزینه ثابت، اگر هزینه ثابت را به صورت پله‌ای در نظر بگیریم، مساله ایجاد شده در تحقیق در عملیات به مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای معروف است. مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای اولین بار توسط کووالسکی و لو [۱۸] پیشنهاد شده است. آنها با تقریب‌هایی این مساله را به یک مساله حمل و نقل معمولی تبدیل کردند و با حل مساله حمل و نقل معمولی ایجاد شده، یک جواب شدنی برای مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای پیشنهاد کردند و سپس این جواب را بهبود دادند تا اینکه یک جواب بهینه برای مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای حاصل گردید.

محمودی راد و همکاران [۱۹] مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای را در شرایط عدم قطعیت مورد بررسی قرار دادند. آنها با در نظر گرفتن هزینه های حمل و نقل ثابت و متغیر به صورت اعداد فازی، جوابی برای مساله حمل و نقل پیشنهاد کردند.

ملاعلیزاده و همکاران [۱۷] به منظور حل مساله حمل با هزینه ثابت مرحله‌ای از روش‌های فراابتکاری استفاده کردند. آنها با استفاده از الگوریتم ممتیک براساس درخت فراگیر، جوابی نزدیک به جواب بهینه برای مساله اصلی پیشنهاد کردند.

روش آزادسازی لاگرانژ برای حل مسایل بهینه‌سازی ترکیباتی بطور گسترده‌ای استفاده شده است [۱۴]، ولی بر اساس تحقیقات انجام شده این روش برای حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای بکار گرفته نشده و در این پژوهش به منظور حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای در ابعاد بالا از روش آزادسازی لاگرانژ استفاده می‌شود.

ساختار مقاله به این شرح است که در ادامه بیان می‌گردد. در بخش دوم مدل ریاضی مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای آورده شده است. پیچیدگی مدل ریاضی و روش آزادسازی لاگرانژ به ترتیب در بخش سوم و چهارم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش پنجم به حل مساله

حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای با روش آزادسازی لاگرانژ پرداخته شده است. نتیجه محاسباتی در بخش ششم آورده می‌شود و در بخش هفتم نتیجه‌گیری و ارایه پیشنهادات ارایه می‌گردد.

۲- مسأله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای

نمادهای زیر برای تعریف مدل ریاضی مسأله به کار گرفته می‌شوند.

مجموعه اندیس‌ها:

M تعداد مبدأها (i=1,2,...,M)

N تعداد مقصدها (j=1,2,...,N)

پارامترها:

a_i ظرفیت مبدا i ام

b_j ظرفیت مقصد j ام

c_{ij} هزینه ارسال هر واحد کالا از مبدا i ام به مقصد j ام

f_{ij} هزینه ثابت ارسال هر واحد کالا از مبدا i ام به مقصد j ام

h_{ij} مقدار کالایی که از مبدا i ام به مقصد j ام که بیش از آن هزینه ثابت دوم به مسأله تخصیص داده می‌شود.

g_{ij} هزینه ثابت اضافی برای ارسال هر واحد کالا از مبدا i ام به مقصد j ام به شرطی که تعداد کالای ارسالی از h_{ij} بیشتر شود.

متغیرهای تصمیم:

x_{ij} مقدار کالای حمل شده از مبدا i به مقصد j

y_{ij} متغیر دودویی است که برابر ۱ است اگر $x_{ij} > 0$ در غیر این صورت برابر صفر.

z_{ij} متغیر دودویی است که برابر ۱ است اگر $x_{ij} > h_{ij}$ در غیر این صورت برابر صفر.

بنابراین مدل ریاضی مسأله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای به صورت زیر است [۱۸]:

$$\text{(P1):Min} \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\left(f_{ij}y_{ij} + g_{ij}z_{ij}\right)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \le a_i \qquad \forall i,$$

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} \ge b_j \qquad \forall j,$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & if\ x_{ij} > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad \forall i,j,$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & if\ x_{ij} > A_{ij} \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad \forall i,j,$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad \forall i,j,$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j,$$

$$z_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j,$$

در این مساله، بدون کاستن از کلیت آن فرض می‌کنیم مدل یک مدل حمل ونقل متوازن است، یعنی مجموع عرضه کل با مجموع تقاضای کل برابر است، در غیر این صورت با معرفی عرضه یا تقاضای مجازی مدل را به یک مدل متوازن تبدیل می‌کنیم. تحت فرض $\sum_{i=1}^{I} a_i \ge \sum_{k=1}^{K} e_k$ مسأله (P1) همواره یک جواب شدنی دارد. برای مثال، آسان است که نشان دهیم:

$$x_{ij} = \frac{a_i \times b_j}{d} \quad i = 1,2,\dots,M,\ j = 1,2,\dots,N,$$

که در آن $d = \sum_{i=1}^{I} a_i = \sum_{j=1}^{J} b_j$ یک جواب شدنی است. قابل ذکر است که برای هر بردار شدنی x هر مولفه x_{ij} به صورت زیر کراندار می‌شود:

$$0 \le x_{ij} \le M_{ij} = \min\{a_i, b_j\} \qquad \forall i,j,$$

همچنین مسأله (P1) یک مسأله کراندار است (زیرا ناحیه شدنی آن هیچ جهت دورشونده‌ای ندارد)، لذا مسأله (P1) با توجه به شدنی و کراندار بودن همواره دارای جواب بهینه است.

لم ۱- در مسأله (P1)، محدودیت $y_{ij} = \begin{cases} 1 & if\ x_{ij} > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$ با محدودیت زیر معادل است:

$x_{ij} \le M_{ij} y_{ij}$,
$y_{ij} \in \{0,1\}$, $M_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$, $\forall i, j$

اثبات. اگر $x_{ij} > 0$ آن‌گاه $M_{ij} y_{ij} > 0$ و چون $y_{ij} \in \{0,1\}$، در نتیجه $y_{ij} = 1$. اگر $x_{ij} = 0$ آن‌گاه $M_{ij} y_{ij} \ge 0$، و چون مسأله از نوع مینیمم سازی است در نتیجه $y_{ij} = 0$.

لم ۲- در مسأله (P1)، محدودیت $z_{ij} = \begin{cases} 1 & if\ x_{ij} > A_{ij} \\ 0 & otherwise \end{cases}$ با محدودیت زیر معادل است:

$$x_{ij} - A_{ij} \le M_{ij} z_{ij} \ ,\ z_{ij} \in \{0,1\},\ \forall i, j$$
$$M_{ij} = \min\{a_i, b_j\},\ \forall i, j$$

اثبات. مشابه لم ۱ است.

بنابراین با در نظر گرفتن لم‌های ۱ و ۲، مدل ریاضی مسأله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

(P2):Min
$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\left(f_{ij}y_{ij} + g_{ij}z_{ij}\right) \qquad (۱)$$
s.t.
$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \le a_i \qquad \forall i, \qquad (۲)$$
$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} \ge b_j \qquad \forall j, \qquad (۳)$$
$$x_{ij} \le M_{ij} y_{ij} \qquad \forall i, j, \qquad (۴)$$
$$x_{ij} - h_{ij} \le M_{ij} z_{ij} \qquad \forall i, j, \qquad (۵)$$
$$x_{ij} \ge 0 \qquad \forall i, j, \qquad (۶)$$
$$y_{ij}, z_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j, \qquad (۷)$$

که در آن $M_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$. در مدل(P2) تابع هدف(۱)، مجموع هزینه‌های مستقیم و ثابت حمل را مینیمم می‌کند. دسته محدودیت‌های (۲)، محدودیت عرضه کالا در مبدا را تضمین می‌کنند. دسته محدودیت‌های (۳)، محدودیت تقاضا در مقصدها را بیان می‌کنند. دسته محدودیت‌های (۴)، که ارتباط بین x_{ij} و y_{ij} را برقرار می‌کنند، اطمینان می‌دهند که مسیر *(i,j)* برای ارسال کالا انتخاب می‌شود (یعنی $y_{ij} = 1$) به شرطی‌که $x_{ij} > 0$ باشد. دسته محدودیت‌های (۵)، بیان می‌کنند که اگر از مسیر *(i,j)* تعداد کالای ارسالی از h_{ij} بیشتر شود، هزینه ثابت دوم هم به مسأله اضافه می‌شود. بالاخره دسته محدودیت‌های (۶) و (۷)، به ترتیب محدودیت‌های نامنفی بودن متغیرهای تصمیم و دودویی مسأله هستند.

۳- پیچیدگی مدل

چون مسایل حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای جزء مسایل چند جمله‌ای سخت هستند [۱۸]، حل این مسایل در اندازه‌های کوچک و تا حدی متوسط، با نرم افزارهای برنامه‌ریزی صحیح مختلط به آسانی انجام می‌شود، اما با افزایش اندازه مساله، سرعت حل آنها کاهش می‌یابد. از آنجایی که حل مسایل با اندازه‌های بزرگ به دلیل محدودیت‌های حافظه با این نرم افزارها دچار مشکل می‌شود، لذا برای حل چنین مسایلی در اندازه‌های متوسط و بزرگ به زمان بسیار زیادی نیاز است و نرم افزارهای برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط، تنها قادر به حل این مسایل در اندازه‌های کوچک و تاحدی متوسط هستند. در ادامه، برای حل چنین مسایلی روش آزادسازی لاگرانژ را پیشنهاد می‌کنیم که قادر به حل مسایلی در اندازه‌های بزرگ می باشد.

۴- روش آزادسازی لاگرانژ

حل مسایل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط در اندازه‌های کوچک و متوسط توسط نرم افزارهایی نظیر CPLEX و Gurobi به راحتی صورت می‌گیرد، اما با افزایش اندازه مساله، سرعت حل آن کاهش می‌یابد. حل مسایل بسیار بزرگ، به دلیل محدودیت‌های حافظه با این نرم افزارها دچار مشکل می‌شود. روش آزاد سازی لاگرانژ یکی از روش‌های پرکاربرد برای حل مسایل بهینه‌سازی مقید و مشکل به خصوص مسایل برنامه‌ریزی عدد صحیح است. این روش که اولین بار توسط هلد و کارپ [۲۰و ۲۱] به

منظور حل مسأله فروشنده دوره‌گرد ابداع شد، یکی از روش‌هایی است که یک مسأله بهینه‌سازی مقید و مشکل را توسط یک مسأله ساده‌تر حل می‌کند.

ایده اصلی روش آزاد سازی لاگرانژ، آزاد کردن محدودیت‌های پیچیده و ضرب آن‌ها در ضریبی به نام ضرایب لاگرانژ و افزودن آن‌ها به تابع هدف مسأله می‌باشد. انتظار می‌رود حل مسأله آزاد شده آسان‌تر از حل مسأله اصلی باشد. به ازای هر مقدار ثابت از ضرایب لاگرانژ، جواب بهینه مسأله آزاد شده، کران پایینی برای مسأله اصلی خواهد بود (در مسأله مینیمم‌سازی). به عبارت دیگر، هر جواب از مسأله آزاد شده یک کران برای جواب مسأله اصلی ارایه می‌دهد. به دلیل حذف برخی قیود و بزرگتر شدن ناحیه شدنی، حل مسأله آزاد شده آسان‌تر از حل مسأله اصلی خواهد بود. از طرفی، جواب مسأله آزاد شده به شرط شدنی بودن در مسأله اصلی، کران بالایی برای آن خواهد بود (در مسأله مینیمم سازی). برای این منظور، معمولاً یک الگوریتم ابتکاری برای ساختن جواب شدنی (کران بالا) از جواب کران پایین پیشنهاد می‌شود. در نتیجه با ماکزیمم کردن، مینیمم حاصل از مسأله آزاد شده، کران پایین بهتری برای مسأله اصلی بدست می‌آید و در یک فرآیند تکراری می‌توان جواب حاصل را به سمت جواب مسأله اصلی سوق داد. برای این منظور از روش زیر گرادیان برای حل مسأله دوگان لاگرانژی استفاده می‌شود. مسأله ماکزیمم سازی تابع لاگرانژ با متغیرهای دوگان (ضرایب لاگرانژ) را مسأله دوگان لاگرانژی می‌نامند. اگر چه روش آزادسازی لاگرانژ برای حل مسایل حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای بکار گرفته نشده ولی برای حل مسایل بهینه‌سازی ترکیباتی بطور گسترده‌ای استفاده شده است. (برای دیدن برخی از کاربردهای این روش [۱۴] را ببینید).

۵- حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای

بطور کلی در مسایل برنامه‌ریزی متغیرهای صحیح، محدودیت‌های شامل متغیرهای دودویی حل مسأله را دشوار می‌کنند، این محدودیت‌ها را محدودیت‌های پیچیده می‌گویند. برای ساختن مسأله آزاد شده، پیچیده‌ترین محدودیت‌ها باید به تابع هدف انتقال داده شوند. بر اساس بررسی صورت گرفته از مدل حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای در ابعاد بالا، محدودیت‌های (۴) و (۵) دسته محدودیت‌های سخت از مسأله هستند و به عنوان محدودیت‌های پیچیده انتخاب می‌شوند. با ضرب کردن این محدودیت‌ها به ترتیب در ضرایب لاگرانژ $\lambda_{ij} \geq 0$ و $\gamma_{ij} \geq 0$ و افزودن آنها به تابع هدف، مسأله لاگرانژ آزاد شده بدست خواهد آمد. همچنین دسته محدودیت زاید زیر به منظور بدست آوردن کران پایین بهتر به مدل اضافه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{M} a_i y_{ij} \geq b_j \qquad j = 1,2,\dots,N, \qquad (۸)$$

بنابراین مساله لاگرانژ آزاد شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
\min\ & OF_{LR}(\lambda,\gamma) \\
&= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(f_{ij}y_{ij} + g_{ij}z_{ij}) \\
&+ \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}(x_{ij} - M_{ij}y_{ij}) \\
&+ \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}(x_{ij} - M_{ij}z_{ij} - h_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(c_{ij} + \lambda_{ij} + \gamma_{ij})x_{ij} \\
&+ \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(f_{ij} - M_{ij}\lambda_{ij})y_{ij} \\
&+ \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(g_{ij} - M_{ij}\gamma_{ij})z_{ij} - \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}h_{ij}
\end{aligned}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leq a_i \qquad \forall i,j, \qquad (۱۰)$$

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} \geq b_j \qquad \forall i,j, \qquad (۱۱)$$

$$\sum_{i=1}^{M} a_i y_{ij} \geq b_j \qquad \forall i,j, \qquad (۱۲)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i,j, \qquad (۱۳)$$

$$y_{ij}, z_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j, \qquad (۱۴)$$

جهت بدست آوردن کران پایین برای مسأله اصلی، مسأله

بالا باید حل شود. با توجه به اینکه متغیرهای y_{ij} و z_{ij} در محدودیت‌های (۱۰) و (۱۱) وجود ندارد، لذا می‌توان جملات $\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(f_{ij}-M_{ij}\lambda_{ij})y_{ij}$ ، $\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(g_{ij}-M_{ij}\gamma_i)z_{ij}$ و $\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}h_{ij}$ را از تابع هدف (۹) حذف کرد. در نتیجه مسأله آزاد سازی لاگرانژ به دو زیر مسأله به صورت زیر تجزیه می‌شود:

زیر مسأله (P3):

(P3):

$$\min \quad OF_{P2}=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(c_{ij}+\lambda_{ij}+\gamma_{ij})x_{ij} \qquad (۱۵)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{N}x_{ij}\le a_i \qquad \forall i, \qquad (۱۶)$$

$$\sum_{i=1}^{M}x_{ij}\ge b_j \qquad \forall j, \qquad (۱۷)$$

$$x_{ij}\ge 0 \qquad \forall i,j, \qquad (۱۸)$$

زیر مسأله (P4):

(P4):
s.t.

$$\min \ OF_{P3}=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(f_{ij}-M_{ij}\lambda_{ij})y_{ij} +\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(g_{ij}-M_{ij}\gamma_{ij})z_{ij}-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}h_{ij} \qquad (۱۹)$$

$$y_{ij},z_{ij}\in\{0,1\} \qquad \forall i,j, \qquad (۲۰)$$

اگر شکل ستاره‌دار متغیرها و عبارات بیانگر مقدار بهینه آنها باشد، کران پایین (LB) برای مسأله اصلی (P2) با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$LB=OF_{LR}^{*}(\lambda,\gamma)=OF_{P2}^{*}+OF_{P3}^{*} \qquad (۲۱)$$

که OF_{P2}^{*} و x_{ijk}^{*} از حل زیر مسأله (P3) که یک مسأله خطی است، بدست می‌آیند. زیر مسأله (P3) به دلیل خطی بودن به سادگی توسط نرم افزارهای بهینه سازی قابل حل است. برای بدست آوردن مقدار بهینه زیر مسأله (P4)، از یک الگوریتم ابتکاری که در زیر پیشنهاد می‌شود، استفاده می‌کنیم.

۵-۱- الگوریتم ابتکاری برای حل زیر مسأله

برای بدست آوردن جواب بهینه مسأله (P4)، با توجه به این که این مسأله از نوع مینیم‌سازی است، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت۱: برای مقادیر منفی $f_{ij}-M_{ij}\lambda_{ij}$ و $g_{ij}-M_{ij}\gamma_{ij}$ مقدار بهینه y_{ij} و z_{ij} برابر یک انتخاب می‌شوند، یعنی $y_{ij}^{*}=1, z_{ij}^{*}=1$.

حالت۲: برای مقادیر مثبت $f_{ij}-M_{ij}\lambda_{ij}$ و $g_{ij}-M_{ij}\gamma_{ij}$ مقدار بهینه y_{ij} و z_{ij} برابر صفر انتخاب می‌شوند، یعنی $y_{ij}^{*}=0, z_{ij}^{*}=0$. در نتیجه

$$OF_{P3}^{*}=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(f_{ij}-M_{ij}\lambda_{ij})y_{ij}^{*} +\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(g_{ij}-M_{ij}\gamma_{ij})z_{ij}^{*}+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}h_{ij}$$

بنابراین الگوریتم بدست آوردن کران پایین برای مسأله اصلی (P2) در الگوریتم ۱ در شکل ۱ آورده شده است.

الگوریتم ۱: الگوریتم کران پایین

۱. مسأله (P3)را جهت بدست آوردن جواب بهینه x_{ij}^* و مقدار تابع هدف بهینه OF_{P2}^* حل کنید.
۲. برای $\forall i \in M,\ \forall j \in N$ مراحل زیر را انجام دهید:
۲. ۱. اگر $f_{ij} - M_{ij}\lambda_{ij} < 0$ آن‌گاه قرار دهید: $y_{ij}^* = 1$، در غیر این صورت قرار دهید: $y_{ij}^* = 0$.
۲. ۲. اگر $g_{ij} - M_{ij}\gamma_{ij} < 0$ آن‌گاه قرار دهید $z_{ij}^* = 1$، در غیر این صورت قرار دهید: $z_{ij}^* = 0$.
۳. مقدار تابع هدف بهینه (P4)را محاسبه کنید، یعنی
$OF_{P3}^* = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(f_{ij} - M_{ij}\lambda_{ij})y_{ij}^* + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(g_{ij} - M_{ij}\gamma_{ij})z_{ij}^* - \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}h_{ij}$
۴. مقدار تابع هدف مسأله لاگرانژ را به عنوان کران پایین مسأله اصلی محاسبه کنید:
$LB = OF_{LR}^*(\lambda,\gamma) = OF_{P2}^* + OF_{P3}^*$

شکل۱: الگوریتم پیدا کردن کران پایین برای مسأله اصلی

از کران پایین تولید شده توسط الگوریتم ۱، برای تولید کران بالا برای مسأله اصلی (P2)، استفاده می‌شود که در بخش بعدی آمده است.

۵-۲- تولید کران بالا برای مسأله اصلی

جوابی‌که توسط الگوریتم ۱ بدست می‌آید، برای محاسبه کران بالا استفاده می‌شود. در موارد زیادی جواب کران پایین ممکن است در مسأله اصلی شدنی نباشد. در چنین مواردی باید روش ابتکاری برای بدست آوردن یک جواب شدنی برای مسأله اصلی، با استفاده از جواب حاصل از کران پایین، ارایه داد. در مسأله تحت بررسی، حالت‌های نقض برای جواب مسأله عبارتند از:

حالت۱: اگر $y_{ij}^* = 0$ و $x_{ij}^* > 0$ باشد، معنی می‌دهد که یک تعداد کالایی از مبدا i به مقصد j فرستاده شده ولی هزینه ثابتی برای آن در نظر گرفته نشده است.

حالت۲: اگر $z_{ij}^* = 0$ و $x_{ij}^* - h_{ij} > 0$ باشد، معنی می‌دهد که یک تعداد کالایی از مبدا i به مقصد j فرستاده شده ولی هزینه ثابتی مرحله‌ای برای آن در نظر گرفته نشده است.

حالت۳: اگر $y_{ij}^* = 1$ و $x_{ij}^* = 0$ باشد، معنی می‌دهد که هیچ کالایی از مبدا i به مقصد j فرستاده نشده ولی هزینه ثابتی برای آن در نظر گرفته شده است.

حالت۴: اگر $z_{ij}^* = 1$ و $x_{ij}^* - h_{ij} \le 0$ باشد، معنی می‌دهد که هیچ یا حداکثر h_{ij} کالا از مبدا i به مقصد j فرستاده شده ولی هزینه ثابتی مرحله‌ای برای آن در نظر گرفته شده است.

حالت‌های ۱ تا ۴ بالا برای بدست آوردن یک کران بالای شدنی، باید اصلاح شوند. برای این منظور یک الگوریتم ابتکاری در زیر پیشنهاد می‌شود.

الگوریتم۲: الگوریتم کران بالا

۱. برای $\forall i \in M,\ \forall j \in N$ مراحل زیر را انجام دهید:
۱. ۱. با استفاده از الگوریتم ۱ جواب مسأله لاگرانژ، یعنی x_{ij}^*، y_{ij}^* و z_{ij}^* را بدست آورید.
۱. ۲. اگر $y_{ij}^* = 0\ \&\ x_{ij}^* > 0$ آن گاه قرار دهید $y_{ij}^* = 1$. ۱. ۳. اگر $z_{ij}^* = 0\ \&\ x_{ij}^* - h_{ij} > 0$ آن گاه قرار دهید $z_{ij}^* = 1$.
۱. ۴. اگر $y_{ij}^* = 1\ \&\ x_{ij}^* = 0$ آن‌گاه قرار دهید $y_{ij}^* = 0$;.
۱. ۵. اگر $z_{ij}^* = 1\ \&\ x_{ij}^* - h_{ij} \le 0$ آن گاه قرار دهید $z_{ij}^* = 0$;.
۲. با استفاده از x_{ij}^*، y_{ij}^* و z_{ij}^* و قرار دادن در تابع هدف مسأله (P2) کران بالای مسأله اصلی را محاسبه کنید، یعنی
$UB = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}x_{ij}^* + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}f_{ij}y_{ij}^* + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}g_{ij}z_{ij}^*$

شکل۲: الگوریتم پیدا کردن کران بالا برای مسأله اصلی

با استفاده از الگوریتم ۲، جوابی که از کران پایین حاصل می‌گردد، با انجام تغییراتی برای مسأله اصلی یک کران بالا خواهد بود.

۵-۳- الگوریتم آزادسازی لاگرانژ

هر بار که یک کران پایین و در نتیجه کران بالا برای مسأله اصلی بدست می‌آید، اگر اختلاف بین کران‌های پایین و بالا کمتر از مقدار کوچک از پیش تعیین شده (می گوییم ε) باشد، الگوریتم خاتمه می‌یابد و جواب بدست آمده به عنوان جواب بهینه معرفی می‌شود. در غیر این صورت، الگوریتم تا تکرار معینی اجرا می‌شود. در هر تکرار، ضرایب لاگرانژ باید به روز شوند که یکی از روش‌های معروف، روش زیرگرادیان است [۲۲ و ۲۳]. برای این منظور، یک طول گام برای هر تکرار بوسیله رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\theta_{ij}^{iter} = \frac{\pi(UB - OF_{LR}^{iter}(\lambda^{iter},\gamma^{iter}))}{P} \qquad (۲۲)$$

$$P = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(x_{ij}^{iter} - M_{ij}y_{ij}^{iter})^2 + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(x_{ij}^{iter} - h_{ij} - M_{ij}z_{ij}^{iter})^2$$

$$\lambda_{ij}^{itet+1} = \lambda_{ij}^{itet} + \theta_{ij}^{itet}(x_{ij}^{iter} - M_{ij}y_{ij}^{iter}) \qquad (۲۳)$$

$$\gamma_{ij}^{itet+1} = \gamma_{ij}^{itet} + \theta_{ij}^{itet}(x_{ij}^{iter} - M_{ij}z_{ij}^{iter} - h_{ij}) \qquad (۲۴)$$

که $\pi \in [0,2]$ انتخاب می‌شود، UB بهترین کران بالای بدست آمده تا این تکرار و $OF_{LR}^{iter}(\lambda^{iter},\gamma^{iter})$ مقدار تابع هدف بهینه از مسأله آزاد شده (P2) است. همچنین اگر پس از چندین تکرار، بهبودی در مقدار کران پایین صورت نگیرد، مقدار π نصف می‌شود. معیار توقف برای روش آزاد سازی لاگرانژ یکی از معیارهای است که قبلاً بیان شد. روند کلی روش آزاد سازی لاگرانژ برای مسأله تحت بررسی، در الگوریتم ۳ در شکل ۳ آمده است.

الگوریتم ۳: الگوریتم آزادسازی لاگرانژ

۱. شمارنده تکرار الگوریتم را انتخاب کنید($iter = 0$).

۲. مقدار ضرایب لاگرانژ را انتخاب کنید ($\lambda^{iter} = \lambda^* = 0, \quad \gamma^{iter} = \gamma^* = 0$).

۳. مقدار کران بالا و کران پایین را انتخاب کنید. ($UB = \infty$ و $LB = 0$).

۴. مقدار π را انتخاب کنید. ($\pi = 2$)

۵. ماکزیمم تعداد تکرارها (I) را تعیین کنید.

۶. تا زمانی که $\frac{UB - LB}{UB} > \varepsilon$ مراحل زیر را تکرار کنید.

۶. ۱. مسأله آزادشده لاگرانژ را با الگوریتم ۱ حل کرده و مقدار بهینه آن یعنی، $OF_{LR}^{iter}(\lambda,\gamma)$ را بدست آورید.

۶. ۲. اگر $OF_{LR}^{iter}(\lambda^{iter},\gamma^{iter}) > LB$ آن‌گاه قرار دهید: $LB = OF_{LR}^{iter}(\lambda^{iter},\gamma^{iter}), \quad \lambda^* = \lambda^{iter}, \ \gamma^* = \gamma^{iter}$

۶. ۳. با استفاده از الگوریتم ۳-۲،جواب شدنی برای مسأله اصلی با مقدار تابع هدف UB_{iter} را بدست آورید.

۶. ۴. اگر $UB_{iter} < UB$ آن‌گاه قرار دهید $UB := UB_{iter}$.

۶. ۵. مقدار ضرایب لاگرانژ را با استفاده از روابط (۲۲) تا (۲۴) به روز کنید.

۶. ۶. اگر (در ۳۰ تکرار متوالی، مقدار کران پایین بروز نشود) آن‌گاه قرار می دهیم $\pi = \pi/2$.

۷. قرار دهید $iter = iter + 1$ و به گام ۶ بروید.

شکل۳: الگوریتم کلی آزاد سازی لاگرانژ برای مسأله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای

۶- نتایج محاسباتی

در این بخش الگوریتم آزادسازی لاگرانژ را برای مسأله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای در قالب مثال عددی اجرا می‌کنیم. الگوریتم با نرم افزار GAMS 23.5 کد شده و روی کامپیوتری با مشخصات Intel Core 2 Duo 2.53 GHz و 2.00 GB RAM اجرا شده است. همچنین ۱۵ مسأله در ابعاد مختلف در نظر گرفته شده است. تعداد محدودیت‌ها و متغیرهای مسأله به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

الف- تعداد متغیرهای پیوسته عبارتند از: $|M| \times |N|$.

ب- تعداد متغیرهای صحیح (دودویی) عبارتند از: $2 \times |M| \times |N|$.

ج- تعداد محدودیت‌ها برابر است با:

$|M| + |N| + \left(5 \times |M| \times |N|\right)$.

اندازه مسایل و مشخصات پارامترها در جدول ۱ و ۲ نشان داده شده است.

جدول ۱: مشخصات پارامترها برای مسایل مختلف

مقادیر پارامترها	پارامترها	اندیس‌ها
$U(200, 400)$	a_i	$\forall i \in M$
$U(50, 100)$	b_j	$\forall j \in N$
$U(10, 800)$	h_{ij}	$\forall i \in M, j \in N$
$U(20, 150)$	c_{ij}	$\forall i \in M, j \in N$
$U(200, 600)$	f_{ij}	$\forall i \in M, j \in N$
$U(200, 600)$	g_{ij}	$\forall i \in M, j \in N$
$\min\{a_i, b_j\}$	M_{ij}	$\forall i \in M, j \in N$

با توجه به جدول ۲، برای بزرگترین اندازه (یعنی مسأله ۱۵)، مسأله تحت بررسی شامل ۹۱۰۰۰۰ متغیر پیوسته، ۱۸۲۰۰۰۰ متغیر صحیح دودویی و ۴۵۵۲۰۰۰ محدودیت است که نشان دهنده آن است مسأله تحت بررسی چقدر برای حل شدن سخت است.

برای حل مسأله با روش آزاد سازی لاگرانژ، تعداد تکرارها یعنی $I = 500$، $\varepsilon = 10^{-2}$، $I_{\max} = 30$ و $\pi = 2$ که در الگوریتم برای مسایل مختلف استفاده شده است. از طرف دیگر مدل حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای با نرم افزار GAMS مستقیما حل شده است. با توجه به اینکه در هر اندازه مساله، پنج مسأله تصادفی با الگوریتم آزادسازی لاگرانژ و نرم افزار GAMS حل شده، شکاف بهینگی (Gap) و زمان اجرا (T) در جدول ۳ گزارش شده است.

قابل ذکر است که $Gap = (UB - LB)/UB$. در جدول ۳، کران پایین، کران بالا و شکاف بهینگی هر اندازه مساله نشان داده شده است. همچنین از این جدول می‌توان دریافت که، نرم افزار GAMS قادر به حل مسأله از شماره ۱۳ به بعد نخواهد بود درحالی‌که مسایل ۱ تا ۱۲ را بطور بهینه حل می‌کند. همچنین آن

برای مسایل ۱ تا ۱۲ اجرای بهتری از روش آزادسازی لاگرانژ دارد، ولی از شماره ۱۳ به بعد روش آزادسازی لاگرانژ، جواب خوبی با شکاف بهینگی داده شده می‌دهد در حالیکه نرم افزار GAMS قادر به حل آنها نیست. همچنین از جدول ۳ نتیجه می‌شود که زمان اجرای روش آزاد سازی لاگرانژ با افزایش ابعاد مسأله افزایش می‌یابد.

۷ - نتیجه گیری و ارایه پیشنهادات

در این پژوهش ابتدا مدلی برای مسأله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای، ارایه شده و از آنجایی که این مسأله یک مسأله از نوع NP-Hard است، از روش ابتکاری آزاد سازی لاگرانژ برای دستیابی به جواب مسأله استفاده شده است. نتایج مثال عددی نشان می‌دهد که نرم افزارهای برنامه‌ریزی عدد صحیح تنها قادر به حل این مسایل تا ابعاد خاصی هستند در حالی‌که روش آزاد سازی لاگرانژ با یک شکاف بهینگی قادر به حل ابعاد

بالاتری می‌باشد. موضوعاتی که برای تحقیقات بعدی می‌توان برشمرد، عبارتند از: حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت با استفاده از روش‌های تجزیه بندرز، تجزیه دنتزیگ- ولف، شاخه و برش و شاخه و قیمت و با در نظر گرفتن مقادیر تقاضا در مقصد به صورت تصادفی و سپس حل آن با روش‌های فراابتکاری.

تقدیر و تشکر

بدین وسیله نویسندگان مقاله از پشتیبانی مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجد سلیمان، در قالب طرح پژوهشی تحت عنوان، روش آزاد سازی لاگرانژ برای مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای، تشکر و قدردانی می‌نمایند.

جدول ۲: اندازه مسایل آزمایشی

تعداد محدودیت‌ها	تعداد متغیرها		$\|N\|$	$\|M\|$	شماره مساله
	صحیح	پیوسته			
1030	400	200	20	10	1
4060	1600	800	40	20	2
10600	4200	2100	70	30	3
25150	10000	5000	100	50	4
68250	27200	13600	170	80	5
125350	50000	25000	250	100	6
400600	160000	80000	400	200	7
625750	250000	125000	500	250	8
900900	360000	180000	600	300	9
1226050	490000	245000	700	350	10
16601200	640000	320000	800	400	11
2251400	900000	450000	900	500	12
2501500	1000000	500000	1000	500	13
3601800	1440000	720000	1200	600	14
4552000	1820000	910000	1300	700	15

جدول ۳: اجرای روش آزادسازی لاگرانژ و جواب نرم افزار GAMS

اجرا با نرم افزار GAMS				اجرا با روش آزادسازی لاگرانژ				شماره مساله
T_{max}	T_{avg}	T_{min}	Gap	T_{max}	T_{avg}	T_{min}	Gap	
0:0:0.52	0:0:0.38	0:0:0.23	0	0:0:74	0:0:68.6	0:0:67	0.02	1
0:0:0.54	0:0:0.38	0:0:0.31	0	0:0:71	0:0:68.2	0:0:63	0.03	2
0:0:1.09	0:0:0.9	0:0:0.83	0	0:0:139	0:0:132	0:0:129	0.05	3
0:0:0.75	0:0:0.71	0:0:0.69	0	0:0:150	0:0:110	0:0:94	0.07	4
0:0:20	0:0:1.76	0:0:1.7	0	0:05:57	0:05:20	0:05:01	0.09	5
0:0:30	0:0:3	0:0:3	0	0:10:29	0:09:40	0:09:06	0.09	6
0:0:11.7	0:0:11.49	0:0:11.3	0	0:39:41	0:37:39	0:35:20	0.11	7
0:0:19.5	0:0:18.85	0:0:18.5	0	1:08:44	1:01:20	0:58:26	0.11	8
0:0:30	0:0:28.6	0:0:28	0	1:35:30	1:20:18	1:15:27	0.11	9
0:0:41	0:0:40.5	0:0:40	0	2:01:24	1:56:30	1:50:20	0.11	10
0:0:62	0:0:56	0:0:54	0	2:41:03	2:25:26	2:13:03	0.11	11
0:0:83	0:0:82.5	0:0:82	0	4:02:18	3:50:54	3:40:76	0.12	12
-	-	-	-	4:12:26	4:02:13	3:49:56	0.12	13
-	-	-	-	8:24:22	8:05:51	7:54:21	0.12	14
-	-	-	-	12:21:01	12:02:21	11:45:21	0.13	15

فهرست منابع

[1] Hirsch, W. M., & Dantzig, G. B. (1968). The fixed-charge problem. Naval Research Logistics Quarterly, 15, 413–424.

[2] Adlakha, V., Kowalski, K., (2003), A simple heuristic for solving small fixed-charge transportation problems, Omega , 31, 205-211.

[3] Adlakha, V., Kowalski, K. (2004). A simple algorithm for the source induced fixed-charge transportation problem. JORS J. Oper. Res. Soc. 55, 1275–1280.

[4] Adlakha, V., Kowalski, K., (2010), A heuristic algorithm for the fixed-charge problem, OPSEARCH, 47(2):166–175.

[5] Gray, P., (1971), Exact solution of the fixed-charge transportation problem. Oper. Res. 19, 1529–1538.

[6] Balinski M. L, (1961), Fixed cost transportation problems. Naval Research Logistic Quarterly, 8(1):41–54.

[7] Kuhn, H.W., Baumol, W.J. (1962), An approximation algorithm for the fixed charge transportation problem. Nav. Res. Logistics Q. 9, 1–15.

[8] Murty, K.G., (1968), Solving the fixed charge problem by ranking the extreme points, Operations Research, 268-279.

[9] Diaby, M., (1981), Successive linear approximation procedure for generalized fixed- charge transportation problems. Journal of Operational Research Society, 42:991–1001.

[10] Sandrock, K. (1988). A simple algorithm for solving small fixed-charge transportation problems. J. Oper. Res. Soc. 39, 467–475.

[11] Palekar, U.S., Karwan, M.H., Zionts, S. (1990), A branch-and-bound method for the fixed charge transportation problem. Manage. Sci. 36, 1092–1105.

[12] Sun, M., Aronson, J. E., McKeown, P. G., Drinka, D., (1998), A tabu search heuristic procedure for the fixed charge transportation problem, European Journal of Operational Research, 106, 441-456.

[13] Antony, Raj, D., Chandrasekharan, R., (2012), A genetic algorithm for solving the fixed-charge transportation model: Two-stage problem, Computers & Operations Research 39, 2016–2032.

[14] Wright, D., von, H., Lanzenauer, C., (1989), Solving the fixed charge problem with lagrangian relaxation and cost allocation heuristics, Eur J Oper Res, 42:304–12.

[15] Wright, D., von, H., Lanzenauer, C., (1991), COLE: a new heuristic approach for solving the fixed charge problem Computational results. Eur J Oper Res, 52:235–46.

[16] Molla-Alizadeh-Zavardehi, S., Hajiaghaei-Keshteli, M., Tavakkolimoghaddam, R., (2011), Solving a capacitated fixed-charge transportation problem by artificial immune and genetic algorithms with a Prufer number representation, Expert Syst Appl; 38: 10462–74.

[17] Molla-Alizadeh-Zavardehi, S., Sanei, M., Soltani, R., Mahmoodirad, A., (2014), Solving a Step Fixed Charge Transportation Problem by a Spanning

Tree-Based Memetic Algorithm, International Journal of Mathematical Modelling & Computations, 4, 181-191.

[18] Kowalski, K and Lev, Benjamin (2008), On step fixed charge transportation problem. OMEGA, 36, 913-917.

[19] Mahmoodirad, A, Hassasi, H, Tohidi, Gh, Sanei, M, (2013), step fixed charge transportation problems with fuzzy numbers, Scientific Journal of Mechanical and Industrial Engineering, 2(3), 50-56.

[20] Held, M., Karp, R. M., (1970), The traveling-salesman problem and minimum spanning trees, Operations Research, 18, 1138-1162.

[21] Held, M., Karp, R. M., (1971), The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: Part II, Mathematical Programming, 1, 6-26.

[22] Fisher, M.L., (1981), The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems, Management Science, 27 (1), 1–18.

[23] Fisher, M. L., (2004), The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems, Management Science, 1861–71.

[24] Vignaux, G.A., Michalewicz, Z., (1991), A genetic Algorithm for the linear transportation problem, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 21: 445–52.