

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال سوم، شماره دهم، تابستان ۱۳۹۶

شماره شاپا: ۱۶۹-۰۱۶۸۲



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

روش آزاد سازی لاگرانژ برای مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای

علی محمودی‌راد^۱، صادق نیرومند^۲، مسعود صانعی^۳، عبدالرحمان ساجدی نژاد^{۴*}

(^۱) استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجد سلیمان، گروه ریاضی، مسجد سلیمان، ایران

(^۲) استادیار، موسسه آموزش عالی فیروزآباد، گروه مهندسی صنایع، فیروزآباد، فارس، ایران

(^۳) دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، گروه ریاضی، تهران، ایران

(^۴) استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجد سلیمان، گروه ریاضی، مسجد سلیمان، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۱/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۲/۲۸

چکیده

در این مقاله مساله حمل و نقل با هزینه ی ثابت مرحله‌ای توسعه داده شده است که محصولات از مبداها با هزینه مستقیم و ثابت مرحله‌ای به مقصدها فرستاده می‌شوند. مدل پیشنهادی، مقدار حمل کالاها در آن مسیرها را با هدف مینیمم نمودن هزینه‌ها (مجموع هزینه‌های مستقیم و ثابت مرحله‌ای) طوری تعیین می‌نماید که تقاضای هر مشتری نیز برآورده شود. چون این مساله از نوع مسائل چند جمله ای سخت است، نرم‌افزارهای بهینه‌سازی قادر به حل این مساله در اندازه‌های کوچک و متوسط هستند. به منظور حل مساله در اندازه‌های بزرگ، روش آزادسازی لاگرانژ را پیشنهاد می‌کنیم. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که روش آزادسازی لاگرانژ با شکاف بهینگی قادر به حل مسایلی با ابعاد بالاتر در مقایسه با نرم افزارهای بهینه سازی است.

واژه‌های کلیدی: ثابت مرحله‌ای، مساله حمل و نقل، آزادسازی لاگرانژ.

۱- مقدمه

مساله حمل و نقل با هزینه ثابت نوعی از مساله حمل و نقل است. این مساله ابتدا توسط هیرسش و دانتزیگ [۱] فرمولبندی شده است. در مساله حمل و نقل با هزینه ثابت، برای هر مسیر یک هزینه ثابت و یک هزینه حمل متغیر برای هر واحد کالای حمل شده وجود دارد. چون این مساله از نوع مسائل چند جمله‌ای سخت است [۲،۳،۴]، زمان محاسباتی برای بدست آوردن جواب‌های دقیق به صورت یک تابع چند جمله‌ای افزایش می‌یابد. روش‌های حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت را می‌توان به سه دسته دقیق، ابتکاری و فرابابتکاری تقسیم کرد. روش‌هایی مانند روش صفحه برش، روش رتبه‌بندی نقاط راسی و روش شاخه و کران مهمترین روش‌های دقیق برای حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت است. هیرسش و دانتزیگ [۱] ثابت کردند که ناحیه شدنی مساله حمل و نقل با هزینه ثابت یک مجموعه محدب کراندار است و تابع هدف آن یک مجموعه مقعر است. گری [۵] یک الگوریتم برای پیدا کردن جواب دقیق با تجزیه آن به یک مساله برنامه‌ریزی صحیح و یکسری زیر مساله حمل و نقل ارائه داد. این روش‌ها به دلیل حجم محاسباتی سنگین، ناکارا هستند. محققین زیادی برای حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت با روش‌های ابتکاری تلاش کردند، اولین بار بالینسکی [۶] مساله حمل و نقل با هزینه ثابت را فرمولبندی نمود و یک روش ابتکاری- تقریبی برای حل این مساله ارائه کرد. کان و بامول [۷]، مورتی [۸]، دیابی [۹]، ساندروک [۱۰]، پالیکار و همکاران [۱۱]، سان و همکاران [۱۲]، ادلخا و همکاران [۳،۴]، آنتونی راج و همکاران [۱۳] روش‌هایی بدست آوردن جواب مساله حمل و نقل با هزینه ثابت، توسعه دادند. روش آزادسازی لاگرانژ توسط رایت و دیگران [۱۴ و ۱۵] پیشنهاد شد، دیابی [۹] تکنیک تقریب خطی برای حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت را ارائه کرد. اگرچه روش‌های ابتکاری بطور محاسباتی معمولاً کارا هستند، اما ایراد اصلی روش‌های ابتکاری این است که امکان دارد در یک بهینه موضعی که خیلی از جواب بهینه دور است، خاتمه یابند. روش‌های فرابابتکاری مانند الگوریتم ژنتیک [۱۶،۱۷]،

الگوریتم ایمنی مصنوعی و ژنتیک بر اساس درخت فراگیر [۱۷] نمونه‌هایی هستند که برای حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت پیشنهاد شده است.

در مساله حمل و نقل با هزینه ثابت، اگر هزینه ثابت را به صورت پله‌ای در نظر بگیریم، مساله ایجاد شده در تحقیق در عملیات به مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای معروف است. مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای اولین بار توسط کووالسکی و لو [۱۸] پیشنهاد شده است. آنها با تقریب‌هایی این مساله را به یک مساله حمل و نقل معمولی تبدیل کردند و با حل مساله حمل و نقل معمولی ایجاد شده، یک جواب شدنی برای مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای پیشنهاد کردند و سپس این جواب را بهبود دادند تا اینکه یک جواب بهینه برای مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای حاصل گردید.

محمودی راد و همکاران [۱۹] مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای را در شرایط عدم قطعیت مورد بررسی قرار دادند. آنها با در نظر گرفتن هزینه‌های حمل و نقل ثابت و متغیر به صورت اعداد فازی، جوابی برای مساله حمل و نقل پیشنهاد کردند.

ملاعلیزاده و همکاران [۱۷] به منظور حل مساله حمل با هزینه ثابت مرحله‌ای از روش‌های فرابابتکاری استفاده کردند. آنها با استفاده از الگوریتم ممتیک براساس درخت فراگیر، جوابی نزدیک به جواب بهینه برای مساله اصلی پیشنهاد کردند.

روش آزادسازی لاگرانژ برای حل مسایل بهینه‌سازی ترکیباتی بطور گسترده‌ای استفاده شده است [۱۴]، ولی بر اساس تحقیقات انجام شده این روش برای حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای بکار گرفته نشده و در این پژوهش به منظور حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای در ابعاد بالا از روش آزادسازی لاگرانژ استفاده می‌شود.

ساختار مقاله به این شرح است که در ادامه بیان می‌گردد. در بخش دوم مدل ریاضی مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای آورده شده است. پیچیدگی مدل ریاضی و روش آزادسازی لاگرانژ به ترتیب در بخش سوم و چهارم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش پنجم به حل مساله

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^N x_{ij} &\leq a_i & \forall i, \\ \sum_{i=1}^M x_{ij} &\geq b_j & \forall j, \\ y_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{if } x_{ij} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & \forall i, j, \\ z_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{if } x_{ij} > A_{ij} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & \forall i, j, \\ x_{ij} &\geq 0 & \forall i, j, \\ y_{ij} &\in \{0, 1\} & \forall i, j, \\ z_{ij} &\in \{0, 1\} & \forall i, j, \end{aligned}$$

در این مساله، بدون کاستن از کلیت آن فرض می‌کنیم مدل یک مدل حمل و نقل متوازن است، یعنی مجموع عرضه کل با مجموع تقاضای کل برابر است، در غیر این صورت با معرفی عرضه یا تقاضای مجازی مدل را به یک مدل متوازن تبدیل می‌کنیم. تحت فرض $\sum_{i=1}^M a_i \geq \sum_{k=1}^N e_k$ مساله (P1) همواره یک جواب شدنی دارد. برای مثال، آسان است که نشان دهیم:

$$x_{ij} = \frac{a_i \times b_j}{d} \quad i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N,$$

که در آن $d = \sum_{i=1}^M a_i = \sum_{j=1}^N b_j$ یک جواب شدنی است. قابل ذکر است که برای هر بردار شدنی x هر مولفه x_{ij} به صورت زیر کراندار می‌شود:

$$0 \leq x_{ij} \leq M_{ij} = \min\{a_i, b_j\} \quad \forall i, j,$$

همچنین مساله (P1) یک مساله کراندار است (زیرا ناحیه شدنی آن هیچ جهت دورشونده‌ای ندارد)، لذا مساله (P1) با توجه به شدنی و کراندار بودن همواره دارای جواب بهینه است.

لم ۱- در مساله (P1)، محدودیت

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } x_{ij} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

با محدودیت زیر معادل است:

حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای با روش آزادسازی لاگرانژ پرداخته شده است. نتیجه محاسباتی در بخش ششم آورده می‌شود و در بخش هفتم نتیجه‌گیری و ارایه پیشنهادات ارایه می‌گردد.

۲- مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای

نمادهای زیر برای تعریف مدل ریاضی مساله به کار گرفته می‌شوند.

مجموعه اندیس‌ها:

M تعداد مبداها ($i=1, 2, \dots, M$)

N تعداد مقصدها ($j=1, 2, \dots, N$)

پارامترها:

a_i ظرفیت مبدا i ام

b_j ظرفیت مقصد j ام

c_{ij} هزینه ارسال هر واحد کالا از مبدا i ام به مقصد j ام

f_{ij} هزینه ثابت ارسال هر واحد کالا از مبدا i ام به مقصد j ام

h_{ij} مقدار کالایی که از مبدا i ام به مقصد j ام که بیش از آن هزینه ثابت دوم به مساله تخصیص داده می‌شود.

g_{ij} هزینه ثابت اضافی برای ارسال هر واحد کالا از مبدا i ام به مقصد j ام به شرطی که تعداد کالای ارسالی از h_{ij} بیشتر شود.

متغیرهای تصمیم:

x_{ij} مقدار کالای حمل شده از مبدا i ام به مقصد j

y_{ij} متغیر دودویی است که برابر ۱ است اگر $x_{ij} > 0$

در غیر این صورت برابر صفر.

z_{ij} متغیر دودویی است که برابر ۱ است اگر $x_{ij} > h_{ij}$

در غیر این صورت برابر صفر.

بنابراین مدل ریاضی مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای به صورت زیر است [۱۸]:

$$\text{(P1):Min} \\ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f_{ij} y_{ij} + g_{ij} z_{ij})$$

محدودیت‌های (۳)، محدودیت تقاضا در مقصدها را بیان می‌کنند. دسته محدودیت‌های (۴)، که ارتباط بین x_{ij} و y_{ij} را برقرار می‌کنند، اطمینان می‌دهند که مسیر (i,j) برای ارسال کالا انتخاب می‌شود (یعنی $y_{ij} = 1$) به شرطی که $x_{ij} > 0$ باشد. دسته محدودیت‌های (۵)، بیان می‌کنند که اگر از مسیر (i,j) تعداد کالای ارسالی از h_{ij} بیشتر شود، هزینه ثابت دوم هم به مسأله اضافه می‌شود. بالاخره دسته محدودیت‌های (۶) و (۷)، به ترتیب محدودیت‌های نامفی بودن متغیرهای تصمیم و دودویی مسأله هستند.

۳- پیچیدگی مدل

چون مسایل حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای جزء مسایل چند جمله‌ای سخت هستند [۱۸]، حل این مسایل در اندازه‌های کوچک و تا حدی متوسط، با نرم افزارهای برنامه‌ریزی صحیح مختلط به آسانی انجام می‌شود، اما با افزایش اندازه مساله، سرعت حل آنها کاهش می‌یابد. از آنجایی که حل مسایل با اندازه‌های بزرگ به دلیل محدودیت‌های حافظه با این نرم افزارها دچار مشکل می‌شود، لذا برای حل چنین مسایلی در اندازه‌های متوسط و بزرگ به زمان بسیار زیادی نیاز است و نرم افزارهای برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط، تنها قادر به حل این مسایل در اندازه‌های کوچک و تا حدی متوسط هستند. در ادامه، برای حل چنین مسایلی روش آزادسازی لاگرانژ را پیشنهاد می‌کنیم که قادر به حل مسایلی در اندازه‌های بزرگ می‌باشد.

۴- روش آزادسازی لاگرانژ

حل مسایل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط در اندازه‌های کوچک و متوسط توسط نرم افزارهایی نظیر CPLEX و Gurobi به راحتی صورت می‌گیرد، اما با افزایش اندازه مساله، سرعت حل آن کاهش می‌یابد. حل مسایل بسیار بزرگ، به دلیل محدودیت‌های حافظه با این نرم افزارها دچار مشکل می‌شود. روش آزادسازی لاگرانژ یکی از روش‌های پرکاربرد برای حل مسایل بهینه‌سازی مقید و مشکل به خصوص مسایل برنامه‌ریزی عدد صحیح است. این روش که اولین بار توسط هلد و کارپ [۲۰ و ۲۱] به

$$x_{ij} \leq M_{ij} y_{ij}, \quad y_{ij} \in \{0,1\}, M_{ij} = \min\{a_i, b_j\}, \quad \forall i, j$$

اثبات. اگر $x_{ij} > 0$ آن‌گاه $M_{ij} y_{ij} > 0$ و چون $x_{ij} \in \{0,1\}$ ، در نتیجه $y_{ij} = 1$. اگر $x_{ij} = 0$ آن‌گاه $M_{ij} y_{ij} \geq 0$ ، و چون مسأله از نوع مینیمم سازی است در نتیجه $y_{ij} = 0$.

لم ۲- در مسأله (P1)، محدودیت

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } x_{ij} > A_{ij} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

است:

$$x_{ij} - A_{ij} \leq M_{ij} z_{ij}, \quad z_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i, j$$

$$M_{ij} = \min\{a_i, b_j\}, \quad \forall i, j$$

اثبات. مشابه لم ۱ است.

بنابراین با در نظر گرفتن لم‌های ۱ و ۲، مدل ریاضی مسأله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$(P2): \text{Min} \quad \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f_{ij} y_{ij} + g_{ij} z_{ij}) \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} \leq a_i \quad \forall i, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} \geq b_j \quad \forall j, \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq M_{ij} y_{ij} \quad \forall i, j, \quad (4)$$

$$x_{ij} - h_{ij} \leq M_{ij} z_{ij} \quad \forall i, j, \quad (5)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j, \quad (6)$$

$$y_{ij}, z_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j, \quad (7)$$

که در آن $M_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$ در مدل (P2) تابع هدف (۱)، مجموع هزینه‌های مستقیم و ثابت حمل را مینیمم می‌کند. دسته محدودیت‌های (۲)، محدودیت عرضه کالا در مبدا را تضمین می‌کنند. دسته

پیچیده‌ترین محدودیت‌ها باید به تابع هدف انتقال داده شوند. بر اساس بررسی صورت گرفته از مدل حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای در ابعاد بالا، محدودیت‌های (۴) و (۵) دسته محدودیت‌های سخت از مساله هستند و به عنوان محدودیت‌های پیچیده انتخاب می‌شوند. با ضرب کردن این محدودیت‌ها به ترتیب در ضرایب لاگرانژ $\lambda_{ij} \geq 0$ و $\gamma_{ij} \geq 0$ و افزودن آنها به تابع هدف، مساله لاگرانژ آزاد شده بدست خواهد آمد. همچنین دسته محدودیت زاید زیر به منظور بدست آوردن کران پایین بهتر به مدل اضافه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^M a_i y_{ij} \geq b_j \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (۸)$$

بنابراین مساله لاگرانژ آزاد شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min \quad & OF_{LR}(\lambda, \gamma) \\ = & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f_{ij} y_{ij} + g_{ij} z_{ij}) \\ & + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} (x_{ij} - M_{ij} y_{ij}) \\ & + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} (x_{ij} - M_{ij} z_{ij} - h_{ij}) \\ = & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (c_{ij} + \lambda_{ij} + \gamma_{ij}) x_{ij} \\ & + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f_{ij} - M_{ij} \lambda_{ij}) y_{ij} \\ & + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (g_{ij} - M_{ij} \gamma_{ij}) z_{ij} - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} h_{ij} \end{aligned}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} \leq a_i \quad \forall i, j, \quad (۱۰)$$

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} \geq b_j \quad \forall i, j, \quad (۱۱)$$

$$\sum_{i=1}^M a_i y_{ij} \geq b_j \quad \forall i, j, \quad (۱۲)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j, \quad (۱۳)$$

$$y_{ij}, z_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, \quad (۱۴)$$

جهت بدست آوردن کران پایین برای مساله اصلی، مساله

منظور حل مساله فروشنده دوره‌گرد ابداع شد. یکی از روش‌هایی است که یک مساله بهینه‌سازی مقید و مشکل را توسط یک مساله ساده‌تر حل می‌کند.

ایده اصلی روش آزاد سازی لاگرانژ، آزاد کردن محدودیت‌های پیچیده و ضرب آنها در ضریبی به نام ضرایب لاگرانژ و افزودن آنها به تابع هدف مساله می‌باشد. انتظار می‌رود حل مساله آزاد شده آسان‌تر از حل مساله اصلی باشد. به ازای هر مقدار ثابت از ضرایب لاگرانژ، جواب بهینه مساله آزاد شده، کران پایینی برای مساله اصلی خواهد بود (در مساله مینیمم‌سازی). به عبارت دیگر، هر جواب از مساله آزاد شده یک کران برای جواب مساله اصلی ارائه می‌دهد. به دلیل حذف برخی قیود و بزرگتر شدن ناحیه شدنی، حل مساله آزاد شده آسان‌تر از حل مساله اصلی خواهد بود. از طرفی، جواب مساله آزاد شده به شرط شدنی بودن در مساله اصلی، کران بالایی برای آن خواهد بود (در مساله مینیمم‌سازی). برای این منظور، معمولاً یک الگوریتم ابتکاری برای ساختن جواب شدنی (کران بالا) از جواب کران پایین پیشنهاد می‌شود. در نتیجه با ماکزیمم کردن مینیمم حاصل از مساله آزاد شده، کران پایین بهتری برای مساله اصلی بدست می‌آید و در یک فرآیند تکراری می‌توان جواب حاصل را به سمت جواب مساله اصلی سوق داد. برای این منظور از روش زیر گرایان برای حل مساله دوگان لاگرانژی استفاده می‌شود. مساله ماکزیمم سازی تابع لاگرانژ با متغیرهای دوگان (ضرایب لاگرانژ) را مساله دوگان لاگرانژی می‌نامند. اگر چه روش آزادسازی لاگرانژ برای حل مسایل حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای بکار گرفته نشده ولی برای حل مسایل بهینه‌سازی ترکیباتی بطور گسترده‌ای استفاده شده است. (برای دیدن برخی از کاربردهای این روش [۱۴] را ببینید).

۵- حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای

بطور کلی در مسایل برنامه‌ریزی متغیرهای صحیح، محدودیت‌های شامل متغیرهای دودویی حل مساله را دشوار می‌کنند، این محدودیت‌ها را محدودیت‌های پیچیده می‌گویند. برای ساختن مساله آزاد شده،

آنها باشد، کران پایین (LB) برای مسأله اصلی (P2) با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$LB = OF_{LR}^*(\lambda, \gamma) = OF_{P2}^* + OF_{P3}^* \quad (21)$$

که OF_{P2}^* و x_{ijk}^* از حل زیر مسأله (P3) که یک مسأله خطی است، بدست می‌آیند. زیر مسأله (P3) به دلیل خطی بودن به سادگی توسط نرم افزارهای بهینه سازی قابل حل است. برای بدست آوردن مقدار بهینه زیر مسأله (P4)، از یک الگوریتم ابتکاری که در زیر پیشنهاد می‌شود، استفاده می‌کنیم.

۵-۱- الگوریتم ابتکاری برای حل زیر مسأله

برای بدست آوردن جواب بهینه مسأله (P4)، با توجه به این که این مسأله از نوع مینیم‌سازی است، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: برای مقادیر منفی $f_{ij} - M_{ij}\lambda_{ij}$ و $g_{ij} - M_{ij}\gamma_{ij}$ مقدار بهینه y_{ij} و z_{ij} برابر یک انتخاب می‌شوند، یعنی $y_{ij}^* = 1, z_{ij}^* = 1$.

حالت ۲: برای مقادیر مثبت $f_{ij} - M_{ij}\lambda_{ij}$ و $g_{ij} - M_{ij}\gamma_{ij}$ مقدار بهینه y_{ij} و z_{ij} برابر صفر انتخاب می‌شوند، یعنی $y_{ij}^* = 0, z_{ij}^* = 0$. در نتیجه

$$OF_{P3}^* = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f_{ij} - M_{ij}\lambda_{ij}) y_{ij}^* + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (g_{ij} - M_{ij}\gamma_{ij}) z_{ij}^* + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} h_{ij}$$

بنابراین الگوریتم بدست آوردن کران پایین برای مسأله اصلی (P2) در الگوریتم ۱ در شکل ۱ آورده شده است.

بالا باید حل شود. با توجه به اینکه متغیرهای y_{ij} و z_{ij} در محدودیت‌های (۱۰) و (۱۱) وجود ندارد، لذا

می‌توان جملات $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f_{ij} - M_{ij}\lambda_{ij}) y_{ij}$ ،

$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} h_{ij}$ و $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (g_{ij} - M_{ij}\gamma_{ij}) z_{ij}$ را از تابع

هدف (۹) حذف کرد. در نتیجه مسأله آزاد سازی لاگرانژ به دو زیر مسأله به صورت زیر تجزیه می‌شود:

زیر مسأله (P3):

(P3):

$$\min OF_{P2} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (c_{ij} + \lambda_{ij} + \gamma_{ij}) x_{ij} \quad (15)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} \leq a_i \quad \forall i, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} \geq b_j \quad \forall j, \quad (17)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j, \quad (18)$$

زیر مسأله (P4):

(P4):

s.t.

$$\min OF_{P3} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f_{ij} - M_{ij}\lambda_{ij}) y_{ij} \quad (19)$$

$$+ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (g_{ij} - M_{ij}\gamma_{ij}) z_{ij} - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} h_{ij}$$

$$y_{ij}, z_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, \quad (20)$$

اگر شکل ستاره‌دار متغیرها و عبارات بیانگر مقدار بهینه

الگوریتم ۱: الگوریتم کران پایین

۱. مسأله (P3) را جهت بدست آوردن جواب بهینه x_{ij}^* و مقدار تابع هدف بهینه $OF_{P_2}^*$ حل کنید.
 ۲. برای $\forall i \in M, \forall j \in N$ مراحل زیر را انجام دهید:
 ۱. اگر $f_{ij} - M_{ij}\lambda_{ij} < 0$ آن گاه قرار دهید: $y_{ij}^* = 1$ ، در غیر این صورت قرار دهید: $y_{ij}^* = 0$.
 ۲. اگر $g_{ij} - M_{ij}\gamma_{ij} < 0$ آن گاه قرار دهید $z_{ij}^* = 1$ ، در غیر این صورت قرار دهید: $z_{ij}^* = 0$.
 ۳. مقدار تابع هدف بهینه (P4) را محاسبه کنید، یعنی

$$OF_{P_3}^* = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f_{ij} - M_{ij}\lambda_{ij})y_{ij}^* + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (g_{ij} - M_{ij}\gamma_{ij})z_{ij}^* - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}h_{ij}$$
- عنوان کران پایین مسأله اصلی محاسبه کنید:
- $$LB = OF_{LR}^*(\lambda, \gamma) = OF_{P_2}^* + OF_{P_3}^*$$

شکل ۱: الگوریتم پیدا کردن کران پایین برای مسأله اصلی

حالت ۲: اگر $Z_{ij}^* = 0$ و $x_{ij}^* - h_{ij} > 0$ باشد، معنی می‌دهد که یک تعداد کالایی از مبدا i به مقصد j فرستاده شده ولی هزینه ثابتی مرحله‌ای برای آن در نظر گرفته نشده است.

حالت ۳: اگر $y_{ij}^* = 1$ و $x_{ij}^* = 0$ باشد، معنی می‌دهد که هیچ کالایی از مبدا i به مقصد j فرستاده نشده ولی هزینه ثابتی برای آن در نظر گرفته شده است.

حالت ۴: اگر $Z_{ij}^* = 1$ و $x_{ij}^* - h_{ij} \leq 0$ باشد، معنی می‌دهد که هیچ یا حداکثر h_{ij} کالا از مبدا i به مقصد j فرستاده شده ولی هزینه ثابتی مرحله‌ای برای آن در نظر گرفته شده است.

حالت‌های ۱ تا ۴ بالا برای بدست آوردن یک کران بالای شدنی، باید اصلاح شوند. برای این منظور یک الگوریتم ابتکاری در زیر پیشنهاد می‌شود.

از کران پایین تولید شده توسط الگوریتم ۱، برای تولید کران بالا برای مسأله اصلی (P2)، استفاده می‌شود که در بخش بعدی آمده است.

۵-۲- تولید کران بالا برای مسأله اصلی

جوابی که توسط الگوریتم ۱ بدست می‌آید، برای محاسبه کران بالا استفاده می‌شود. در موارد زیادی جواب کران پایین ممکن است در مسأله اصلی شدنی نباشد. در چنین مواردی باید روش ابتکاری برای بدست آوردن یک جواب شدنی برای مسأله اصلی، با استفاده از جواب حاصل از کران پایین، ارایه داد. در مسأله تحت بررسی، حالت‌های نقض برای جواب مسأله عبارتند از:

حالت ۱: اگر $y_{ij}^* = 0$ و $x_{ij}^* > 0$ باشد، معنی می‌دهد که یک تعداد کالایی از مبدا i به مقصد j فرستاده شده ولی هزینه ثابتی برای آن در نظر گرفته نشده است.

الگوریتم ۲: الگوریتم کران بالا

۱. برای $\forall i \in M, \forall j \in N$ مراحل زیر را انجام دهید:
 - ۱.۱. با استفاده از الگوریتم ۱ جواب مسأله لاگرانژ، یعنی x_{ij}^* ، y_{ij}^* و z_{ij}^* را بدست آورید.
 - ۱.۲. اگر $x_{ij}^* > 0$ & $y_{ij}^* = 0$ آن گاه قرار دهید $y_{ij}^* = 1$ ، ۱.۳. اگر $x_{ij}^* - h_{ij} > 0$ & $z_{ij}^* = 0$ آن گاه قرار دهید $z_{ij}^* = 1$.
 - ۱.۴. اگر $x_{ij}^* = 0$ & $y_{ij}^* = 1$ آن گاه قرار دهید $y_{ij}^* = 0$.
 - ۱.۵. اگر $x_{ij}^* - h_{ij} \leq 0$ & $z_{ij}^* = 1$ آن گاه قرار دهید $z_{ij}^* = 0$.
۲. با استفاده از x_{ij}^* ، y_{ij}^* و z_{ij}^* و قرار دادن در تابع هدف مسأله (P2) کران بالای مسأله اصلی را محاسبه کنید، یعنی

$$UB = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}x_{ij}^* + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f_{ij}y_{ij}^* + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N g_{ij}z_{ij}^*$$

شکل ۲: الگوریتم پیدا کردن کران بالا برای مسأله اصلی

$$P = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (x_{ij}^{iter} - M_{ij} y_{ij}^{iter})^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (x_{ij}^{iter} - h_{ij} - M_{ij} z_{ij}^{iter})^2$$

$$\lambda_{ij}^{itet+1} = \lambda_{ij}^{itet} + \theta_{ij}^{itet} (x_{ij}^{iter} - M_{ij} y_{ij}^{iter}) \quad (23)$$

$$\gamma_{ij}^{itet+1} = \gamma_{ij}^{itet} + \theta_{ij}^{itet} (x_{ij}^{iter} - M_{ij} z_{ij}^{iter} - h_{ij}) \quad (24)$$

که $\pi \in (0, 2]$ انتخاب می‌شود، UB بهترین کران بالای بدست آمده تا این تکرار و $OF_{LR}^{iter}(\lambda^{iter}, \gamma^{iter})$ مقدار تابع هدف بهینه از مسأله آزاد شده (P2) است. همچنین اگر پس از چندین تکرار، بهبودی در مقدار کران پایین صورت نگیرد، مقدار π نصف می‌شود. معیار توقف برای روش آزاد سازی لاگرانژ یکی از معیارهای است که قبلاً بیان شد. روند کلی روش آزاد سازی لاگرانژ برای مسأله تحت بررسی، در الگوریتم ۳ در شکل ۳ آمده است.

با استفاده از الگوریتم ۲، جوابی که از کران پایین حاصل می‌گردد، با انجام تغییراتی برای مسأله اصلی یک کران بالا خواهد بود.

۵-۳- الگوریتم آزادسازی لاگرانژ

هر بار که یک کران پایین و در نتیجه کران بالا برای مسأله اصلی بدست می‌آید، اگر اختلاف بین کران‌های پایین و بالا کمتر از مقدار کوچک از پیش تعیین شده (می‌گوییم ϵ) باشد، الگوریتم خاتمه می‌یابد و جواب بدست آمده به عنوان جواب بهینه معرفی می‌شود. در غیر این صورت، الگوریتم تا تکرار معینی اجرا می‌شود. در هر تکرار، ضرایب لاگرانژ باید به روز شوند که یکی از روش‌های معروف، روش زیرگردان است [۲۲ و ۲۳]. برای این منظور، یک طول گام برای هر تکرار بوسیله رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\theta_{ij}^{iter} = \frac{\pi (UB - OF_{LR}^{iter}(\lambda^{iter}, \gamma^{iter}))}{P} \quad (22)$$

الگوریتم ۳: الگوریتم آزادسازی لاگرانژ

۱. شمارنده تکرار الگوریتم را انتخاب کنید ($iter = 0$).
۲. مقدار ضرایب لاگرانژ را انتخاب کنید ($\lambda^{iter} = \lambda^* = 0, \gamma^{iter} = \gamma^* = 0$).
۳. مقدار کران بالا و کران پایین را انتخاب کنید. ($UB = \infty$ و $LB = 0$).
۴. مقدار π را انتخاب کنید. ($\pi = 2$).
۵. ماکزیمم تعداد تکرارها (I) را تعیین کنید.
۶. تا زمانی که $\frac{UB - LB}{UB} > \epsilon$ مراحل زیر را تکرار کنید.
 - ۶.۱. مسأله آزاد شده لاگرانژ را با الگوریتم ۱ حل کرده و مقدار بهینه آن یعنی، $OF_{LR}^{iter}(\lambda, \gamma)$ را بدست آورید.
 - ۶.۲. اگر $OF_{LR}^{iter}(\lambda^{iter}, \gamma^{iter}) > LB$ آن‌گاه قرار دهید: $\lambda^* = \lambda^{iter}, \gamma^* = \gamma^{iter}, LB = OF_{LR}^{iter}(\lambda^{iter}, \gamma^{iter})$.
 - ۶.۳. با استفاده از الگوریتم ۲-۳، جواب شدنی برای مسأله اصلی با مقدار تابع هدف UB_{iter} را بدست آورید.
 - ۶.۴. اگر $UB_{iter} < UB$ آن‌گاه قرار دهید $UB := UB_{iter}$.
 - ۶.۵. مقدار ضرایب لاگرانژ را با استفاده از روابط (۲۲) تا (۲۴) به روز کنید.
 - ۶.۶. اگر (در ۳۰ تکرار متوالی، مقدار کران پایین بروز نشود) آن‌گاه قرار می‌دهیم $\pi = \pi/2$.
 - ۶.۷. قرار دهید $iter = iter + 1$ و به گام ۶ بروید.

شکل ۳: الگوریتم کلی آزاد سازی لاگرانژ برای مسأله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای

۶- نتایج محاسباتی

در این بخش الگوریتم آزادسازی لاگرانژ را برای مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای در قالب مثال عددی اجرا می‌کنیم. الگوریتم با نرم افزار GAMS 23.5 کد شده و روی کامپیوتری با مشخصات Intel Core 2 Duo 2.53 GHz و 2.00 GB RAM اجرا شده است. همچنین ۱۵ مساله در ابعاد مختلف در نظر گرفته شده است. تعداد محدودیت‌ها و متغیرهای مساله به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

جدول ۱: مشخصات پارامترها برای مسایل مختلف

اندیس‌ها	پارامترها	مقادیر پارامترها
$\forall i \in M$	a_i	$U(200, 400)$
$\forall j \in N$	b_j	$U(50, 100)$
$\forall i \in M, j \in N$	h_{ij}	$U(10, 800)$
$\forall i \in M, j \in N$	c_{ij}	$U(20, 150)$
$\forall i \in M, j \in N$	f_{ij}	$U(200, 600)$
$\forall i \in M, j \in N$	g_{ij}	$U(200, 600)$
$\forall i \in M, j \in N$	M_{ij}	$\min\{a_i, b_j\}$

از شماره ۱۳ به بعد نخواهد بود درحالی که مسایل ۱ تا ۱۲ را بطور بهینه حل می‌کند. همچنین آن برای مسایل ۱ تا ۱۲ اجرای بهتری از روش آزادسازی لاگرانژ دارد، ولی از شماره ۱۳ به بعد روش آزادسازی لاگرانژ، جواب خوبی با شکاف بهینگی داده شده می‌دهد در حالیکه نرم افزار GAMS قادر به حل آنها نیست. همچنین از جدول ۳ نتیجه می‌شود که زمان اجرای روش آزاد سازی لاگرانژ با افزایش ابعاد مساله افزایش می‌یابد.

۷- نتیجه گیری و ارایه پیشنهادت

در این پژوهش ابتدا مدلی برای مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای، ارایه شده و از آنجایی که این مساله یک مساله از نوع NP-Hard است، از روش ابتکاری آزاد سازی لاگرانژ برای دستیابی به جواب مساله استفاده شده است. نتایج مثال عددی نشان می‌دهد که نرم افزارهای برنامه‌ریزی عدد صحیح تنها قادر به حل این مسایل تا ابعاد خاصی هستند در حالی که روش آزاد سازی لاگرانژ با یک شکاف بهینگی قادر به حل ابعاد

با توجه به جدول ۲، برای بزرگترین اندازه (یعنی مساله ۱۵)، مساله تحت بررسی شامل ۹۱۰۰۰۰ متغیر پیوسته، ۱۸۲۰۰۰۰ متغیر صحیح دودویی و ۴۵۵۲۰۰۰ محدودیت است که نشان دهنده آن است مساله تحت بررسی چقدر برای حل شدن سخت است.

برای حل مساله با روش آزاد سازی لاگرانژ، تعداد تکرارها یعنی $I = 500$ ، $\varepsilon = 10^{-2}$ ، $I_{\max} = 30$ و $\pi = 2$ که در الگوریتم برای مسایل مختلف استفاده شده است. از طرف دیگر مدل حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای با نرم افزار GAMS مستقیماً حل شده است. با توجه به اینکه در هر اندازه مساله، پنج مساله تصادفی با الگوریتم آزادسازی لاگرانژ و نرم افزار GAMS حل شده، شکاف بهینگی (Gap) و زمان اجرا (T) در جدول ۳ گزارش شده است.

قابل ذکر است که $Gap = (UB - LB)/UB$ در جدول ۳، کران پایین، کران بالا و شکاف بهینگی هر اندازه مساله نشان داده شده است. همچنین از این جدول می‌توان دریافت که، نرم افزار GAMS قادر به حل مساله

تقدیر و تشکر

بدین وسیله نویسندگان مقاله از پشتیبانی مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجد سلیمان، در قالب طرح پژوهشی تحت عنوان، روش آزاد سازی لاگرانژ برای مساله حمل و نقل با هزینه ثابت مرحله‌ای، تشکر و قدردانی می‌نمایند.

بالا تری می‌باشد. موضوعاتی که برای تحقیقات بعدی می‌توان برشمرد، عبارتند از: حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت با استفاده از روش‌های تجزیه بندرز، تجزیه دنتزیگ-ولف، شاخه و برش و شاخه و قیمت و با در نظر گرفتن مقادیر تقاضا در مقصد به صورت تصادفی و سپس حل آن با روش‌های فرابتنکاری.

جدول ۲: اندازه مسایل آزمایشی

شماره مساله	$ M $	$ N $	تعداد متغیرها		تعداد محدودیت‌ها
			پیوسته	صحیح	
1	10	20	200	400	1030
2	20	40	800	1600	4060
3	30	70	2100	4200	10600
4	50	100	5000	10000	25150
5	80	170	13600	27200	68250
6	100	250	25000	50000	125350
7	200	400	80000	160000	400600
8	250	500	125000	250000	625750
9	300	600	180000	360000	900900
10	350	700	245000	490000	1226050
11	400	800	320000	640000	16601200
12	500	900	450000	900000	2251400
13	500	1000	500000	1000000	2501500
14	600	1200	720000	1440000	3601800
15	700	1300	910000	1820000	4552000

جدول ۳: اجرای روش آزادسازی لاگرانژ و جواب نرم افزار GAMS

شماره مساله	اجرا با روش آزادسازی لاگرانژ				اجرا با نرم افزار GAMS			
	Gap	T _{min}	T _{avg}	T _{max}	Gap	T _{min}	T _{avg}	T _{max}
1	0.02	0:0:67	0:0:68.6	0:0:74	0	0:0:0.23	0:0:0.38	0:0:0.52
2	0.03	0:0:63	0:0:68.2	0:0:71	0	0:0:0.31	0:0:0.38	0:0:0.54
3	0.05	0:0:129	0:0:132	0:0:139	0	0:0:0.83	0:0:0.9	0:0:1.09
4	0.07	0:0:94	0:0:110	0:0:150	0	0:0:0.69	0:0:0.71	0:0:0.75
5	0.09	0:05:01	0:05:20	0:05:57	0	0:0:1.7	0:0:1.76	0:0:2.0
6	0.09	0:09:06	0:09:40	0:10:29	0	0:0:3	0:0:3	0:0:3.0
7	0.11	0:35:20	0:37:39	0:39:41	0	0:0:11.3	0:0:11.49	0:0:11.7
8	0.11	0:58:26	1:01:20	1:08:44	0	0:0:18.5	0:0:18.85	0:0:19.5
9	0.11	1:15:27	1:20:18	1:35:30	0	0:0:28	0:0:28.6	0:0:30
10	0.11	1:50:20	1:56:30	2:01:24	0	0:0:40	0:0:40.5	0:0:41
11	0.11	2:13:03	2:25:26	2:41:03	0	0:0:54	0:0:56	0:0:62
12	0.12	3:40:76	3:50:54	4:02:18	0	0:0:82	0:0:82.5	0:0:83
13	0.12	3:49:56	4:02:13	4:12:26	-	-	-	-
14	0.12	7:54:21	8:05:51	8:24:22	-	-	-	-
15	0.13	11:45:21	12:02:21	12:21:01	-	-	-	-

فهرست منابع

- [10] Sandrock, K. (1988). A simple algorithm for solving small fixed-charge transportation problems. *J. Oper. Res. Soc.* 39, 467-475.
- [11] Palekar, U.S., Karwan, M.H., Zionts, S. (1990), A branch-and-bound method for the fixed charge transportation problem. *Manage. Sci.* 36, 1092-1105.
- [12] Sun, M., Aronson, J. E., McKeown, P. G., Drinka, D., (1998), A tabu search heuristic procedure for the fixed charge transportation problem, *European Journal of Operational Research*, 106, 441-456.
- [13] Antony, Raj, D., Chandrasekharan, R., (2012), A genetic algorithm for solving the fixed-charge transportation model: Two-stage problem, *Computers & Operations Research* 39, 2016-2032.
- [14] Wright, D., von, H., Lanzener, C., (1989), Solving the fixed charge problem with lagrangian relaxation and cost allocation heuristics, *Eur J Oper Res*, 42:304-12.
- [15] Wright, D., von, H., Lanzener, C., (1991), COLE: a new heuristic approach for solving the fixed charge problem Computational results. *Eur J Oper Res*, 52:235-46.
- [16] Molla-Alizadeh-Zavardehi, S., Hajiaghahi-Keshteli, M., Tavakkolimoghaddam, R., (2011), Solving a capacitated fixed-charge transportation problem by artificial immune and genetic algorithms with a Prufer number representation, *Expert Syst Appl*; 38: 10462-74.
- [17] Molla-Alizadeh-Zavardehi, S., Sanei, M., Soltani, R., Mahmoodirad, A., (2014), Solving a Step Fixed Charge Transportation Problem by a Spanning
- [1] Hirsch, W. M., & Dantzig, G. B. (1968). The fixed-charge problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, 15, 413-424.
- [2] Adlakha, V., Kowalski, K., (2003), A simple heuristic for solving small fixed-charge transportation problems, *Omega*, 31, 205-211.
- [3] Adlakha, V., Kowalski, K. (2004). A simple algorithm for the source induced fixed-charge transportation problem. *JORS J. Oper. Res. Soc.* 55, 1275-1280.
- [4] Adlakha, V., Kowalski, K., (2010), A heuristic algorithm for the fixed-charge problem, *OPSEARCH*, 47(2):166-175.
- [5] Gray, P., (1971), Exact solution of the fixed-charge transportation problem. *Oper. Res.* 19, 1529-1538.
- [6] Balinski M. L, (1961), Fixed cost transportation problems. *Naval Research Logistic Quarterly*, 8(1):41-54.
- [7] Kuhn, H.W., Baumol, W.J. (1962), An approximation algorithm for the fixed charge transportation problem. *Nav. Res. Logistics Q.* 9, 1-15.
- [8] Murty, K.G., (1968), Solving the fixed charge problem by ranking the extreme points, *Operations Research*, 268-279.
- [9] Diaby, M., (1981), Successive linear approximation procedure for generalized fixed-charge transportation problems. *Journal of Operational Research Society*, 42:991-1001.

Tree-Based Memetic Algorithm, International Journal of Mathematical Modelling & Computations, 4, 181-191.

[18] Kowalski, K and Lev, Benjamin (2008), On step fixed charge transportation problem. OMEGA, 36, 913-917.

[19] Mahmoodirad, A, Hassasi, H, Tohidi, Gh, Sanei, M, (2013), step fixed charge transportation problems with fuzzy numbers, Scientific Journal of Mechanical and Industrial Engineering, 2(3), 50-56.

[20] Held, M., Karp, R. M., (1970), The traveling-salesman problem and minimum spanning trees, Operations Research, 18, 1138-1162.

[21] Held, M., Karp, R. M., (1971), The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: Part II, Mathematical Programming, 1, 6-26.

[22] Fisher, M.L., (1981), The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems, Management Science, 27 (1), 1-18.

[23] Fisher, M. L., (2004), The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems, Management Science, 1861-71.

[24] Vignaux, G.A., Michalewicz, Z., (1991), A genetic Algorithm for the linear transportation problem, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 21: 445-52.