دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره نهم، بهار ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

عملگرهایِ جدِید از طرِیق اندازه نافشردگِی

محسن ربانِی[۱]، رضا عرب[۲*]، امِیر علِی طباطبایِی عدنانِی[۳]

(۱و ۲) گروه رِیاضِی، واحدِ سارِی، دانشگاه آزاد اسلامِی، سارِی، اِیران
(۳) گروه رِیاضِی، دانشکده علوم پایه، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامِی، تهران، اِیران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۲/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۲/۰۵

چکیده

در این مقاله ازدو مفهوم اندازه نافشردگی وعملگرهای تراکمی مر–کلر[۱]استفاده می‌کنیم، اندازه نافشردگی برای وجود جواب معادلات انتگرال غیرخطی، معادلات دیفرانسیل معمولی و دستگاه معادلات دیفرانسیل با بعدمتناهی و نامتناهی توسط محققان مختلفی بکارگیری شده است. همچنین عملگرهای تراکمی در بعضی مقالات مانند [8-12] مشاهده می‌گردد. با استفاده از دو مفهوم فوق ما می‌توانیم بعضی از قضایایی که توسط نویسندگان دیگروبخصوص قضیه نقطه ثابت داربو[۲] را گسترش دهیم. فضای جواب در این مقاله را، فضای شامل همه دنباله‌های همگرا با حد متناهی که با نرم مناسب یک فضای باناخ است در نظر می‌گیریم. برای دستیابی به هدفمان، چند قضیه را با استفاده از اندازه نافشردگی وعملگرهای تراکمی مر–کلر به اثبات می‌رسانیم که این قضایا باعث گسترش کارهای نویسندگان دیگرمی‌گردد. برای اعتبار و کاربرد قضایای پیشنهادیمان، ما وجود جواب برای دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم نامتناهی با شرایط مرزی را ثابت می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: تراکم مر–کلر، اندازه نافشردگِی، نقطه ثابت، فضاِی باناخ.

عهده‌دارمکاتبات
*. Email: mathreza.arab@gmail.com

1. Meir-Keeler condensing
2. Darbo

۱. مقدمه و مطالب پایه‌ای

در این بخش، بعضی از مفاهیم اندازه نافشردگی را مورد توجه قرار می‌دهیم که در آن $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه اعداد حقیقی و $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ در نظر می‌گیریم.

$(E,\|.\|)$ را یک فضای باناخ حقیقی با عنصر صفر، $\overline{B}(x,r)$ را گوی بسته به مرکز x و شعاع r و همچنین $\overline{B_r}$ را بیانگر $\overline{B}(0,r)$ تصور می‌کنیم. برای $\emptyset \neq X \subset E$، مجموعه $\overline{X}$ و $convX$ را به ترتیب بستار و پوسته محدب X می‌نامیم. علاوه بر این m_E را به عنوان خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های نا تهی و کراندار از E و n_E را به عنوان زیر خانواده شامل همه زیر مجموعه های نسبتا فشرده از E در نظر می‌گیریم.

۱-۱ تعریف [4]. یک نگاشت $\mu: m_E \to R_+$ یک اندازه نافشردگی در E است اگر در شرایط زیر صدق کند.

۱. خانواده $\ker\mu = \{X \in m_E \ :\mu(X) = 0\}$ ناتهی باشد و $\ker \mu \subset n_E$.

۲. $X\subset Y \Longrightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$.

۳. $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$.

۴. $\mu(convX) = \mu(X)$.

۵. $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y) \ , \forall\lambda\epsilon[0,1]$.

۶. اگر $\{X_n\}$ دنباله مجموعه‌های بسته از m_E بطوریکه $X_{n+1} \subset X_n$ برای $n=1,2,\ldots$ و $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n)=0$ آنگاه $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$.

زیر خانواده $\ker\mu$ که در (۱) تعریف شده، بیانگر هسته اندازه نافشرده μ است و چون

$$\mu(X_\infty) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n\right) \leq \mu(X_n),$$

مشاهده می‌گردد که $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n) = 0$ و از آنجا نتیجه می‌شود که $X_\infty \in \ker\mu$.

قضیه نقطه ثابت داربو یک تصمیم بسیار مهم از قضیه نقطه ثابت شودر[1] است که شامل قضیه وجودی نقطه ثابت باناخ نیز می‌باشد.

۱-۲. قضیه (قضیه نقطه ثابت شودر) [1] فرض کنید C یک زیر مجموعه بسته و محدب از فضای باناخ E باشد، آنگاه هر نگاشت پیوسته و فشرده $T:C\longrightarrow C$ دارای حداقل یک نقطه ثابت است.

در ادامه به قضیه مشهور از نوع داربو می‌پردازیم.

۱-۳. قضیه (قضیه نقطه ثابت داربو) [4] فرض کنید Ω زیر مجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای باناخ E باشد و همچنین $T:\Omega \longrightarrow \Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد بطوریکه ثابت $k\in [0,1)$ با خاصیت زیروجود داشته باشد:

$$\mu(TX) \leq k\mu(X), \forall X \subset \Omega \ \ , X \neq \emptyset$$

آنگاه T دارای نقطه ثابت در مجموعه Ω است.

در سال ۱۹۶۹ مر-کلر [8]، قضیه نقطه ثابت در فضای متریک (X,d) را برای نگاشت‌هایی با خاصیت زیر مورد بررسی قرار داده‌اند.

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta(\varepsilon) > 0 :$$
$$\varepsilon \leq d(x,y) < \varepsilon + \delta(\varepsilon) \Rightarrow \qquad (۱)$$
$$d(Tx,Ty) < \varepsilon, \ \forall x,y \in X$$

شرط فوق را شرط تراکمی (یا انقباضی) از نوع مر-کلرمی‌نامند. یک نتیجه مشهور به عنوان تابع مر-کلربه صورت زیربیان می‌گردد.

۱-۴ تعریف $\phi: R_+ \longrightarrow R_+$ یک تابع میر-کلرمی باشد، اگر $\phi(0) = 0$ و برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ بطوریکه

$$\forall t \in R_+ \ , \varepsilon \leq t < \varepsilon + \delta \Longrightarrow \phi(t) < \varepsilon.$$

۱- ۵. تبصره واضح است که اگر ϕ یک تابع مر-کلر باشد، آنگاه به ازای هر $t>0$، $\phi(t) < t$.

حال به معرفی تابع ضعیف کننده مر-کلر می‌پردازیم.

۱-۶. تعریف [9,10] تابع $\psi: R_+ \longrightarrow R_+$ را یک تابع مر- کلر ضعیف کننده گوییم هرگاه:

---

1. Schauder

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0;$
$\forall t \ge 0,\ \varepsilon \le t \le \varepsilon + \delta \Rightarrow$
$\exists n_0 \in \mathbb{N};\ \psi^{n_0}_{(t)} < \varepsilon .$

۱-۷. تعریف [7] تابع $\phi: R_+ \longrightarrow R_+$ را یک تابع جکی مسکی[1] گوییم اگر

$$\phi(0) = 0,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0;$$
$$\forall t \in R_+, \varepsilon < t < \varepsilon + \delta \Rightarrow \phi(t) \le \varepsilon.$$

۱-۸. تبصره [3] به وضوح هر تابع مر-کلر، یک تابع جکی مسکی است. اما عکس آن صادق نیست حتی اگر برای هر $t>0$ ،$\phi(t) < t$ باشد. آقاجانی[2] و دیگران [2] یک گسترش یافته از قضیه داربو را ارائه کرده اند که به شرح زیر می باشد.

۱.۹ تعریف. فرض کنید C یک زیر مجموعه ناتهی از فضای باناخ E و μ یک اندازه نافشردگی دلخواه روی E باشد، گوییم عملگر $T:C \longrightarrow C$ یک عملگر انقباض مر- کلر است اگر برای هر زیر مجموعه کراندار X از C شرط زیر برقرار باشد:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0;\ \varepsilon \le \mu(X) < \varepsilon + \delta$$
$$\Rightarrow \mu(T(X)) < \varepsilon.$$

۱-۱۰. قضیه [2] فرض کنید C یک زیر مجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای باناخ E باشد و همچنین μ یک اندازه اندازه نافشردگی دلخواه روی E باشد. اگر $T:C \longrightarrow C$ عملگر پیوسته و انقباضی مر-کلر باشد، آنگاه T حداقل یک نقطه ثابت دارد و مجموعه همه نقاط ثابت T در C فشرده است.

۲. قضیه نقطه ثابت جدید

در این بخش از اندازه نافشردگی و عملگر انقباضی مر- کلر برای ایجاد بعضی از قضایای نقطه ثابت استفاده می کنیم.

۲- ۱. تعریف: فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی از فضای باناخ E و μ یک اندازه نافشردگی روی E باشد. می گوییم عملگر $T:\Omega \longrightarrow \Omega$ یک تابع گسترش یافته مر-کلر است، اگر داشته باشیم:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0;$$
$$\forall X \subset \Omega, \varepsilon \le \mu(X) + \varphi(\mu(X)) < \varepsilon + \delta(\varepsilon) \quad (۲)$$
$$\Rightarrow \mu(TX) + \varphi(\mu(TX)) < \varepsilon.$$

که در آن $\varphi: R_+ \longrightarrow R_+$ تابع پیوسته است.
این بخش را با اولین قضیه مان ادامه می‌دهیم.

۲-۲. قضیه: فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای باناخ E بوده و μ یک اندازه نافشردگی دلخواه روی E باشد. همچنین $T:\Omega \longrightarrow \Omega$ را به عنوان یک عملگرانقباضی پیوسته از مر-کلر در نظر می گیریم، آنگاه T حداقل یک نقطه ثابت دارد و مجموعه نقاط ثابت T در Ω فشرده‌اند.

اثبات: با استقراء، یک دنباله $\{\Omega_n\}$ بطوریکه $\Omega_0 = \Omega$ و $\Omega_n = \text{conv}\,(T\Omega_{n-1})$ برای $n \ge 1$ بدست می‌آوریم:

$T\Omega_0 = T\Omega \subseteq \Omega = \Omega_0\ , \Omega_1 =$
$\text{conv}\,(T\Omega_0) \subseteq \Omega = \Omega_0\ \ ,$

علاوه بر این با ادامه روند فوق داریم

$$\Omega_0 \supseteq \Omega_1 \supseteq \cdots \supseteq \Omega_n \supseteq \Omega_{n+1} \supseteq \cdots$$

اگر یک عدد صحیح $N \ge 0$ وجود داشته باشد بطوریکه $T(\Omega_N) = 0$، آنگاه Ω_N فشرده است. بدین ترتیب قضیه ۱-۲ نتیجه می‌دهد که T یک نقطه ثابت دارد.
حال فرض می‌کنیم که $\mu(\Omega_n) \neq 0$ ، $\forall n \ge 0$، در این صورت با تعریف $\varepsilon_n = \mu\,(\Omega_n) + \varphi\,(\mu\,(\Omega_n))$، و $\delta_n = \delta(\varepsilon_n) > 0$ و بوسیله تعریف Ω_n و $\varepsilon_n < \varepsilon_n + \delta_n$ داریم

$\varepsilon_{n+1} = \mu\,(\Omega_{n+1}) + \varphi\,(\mu\,(\Omega_{n+1}))$
$< \mu\,(\Omega_n) + \varphi\,(\mu\,(\Omega_n))$

1. Jachymski
2. Aghajani

علاوه بر این $\{\varepsilon_n\}$ یک دنباله کاهشی و مثبت از اعداد حقیقی است پس، $\exists\gamma\geq 0;\varepsilon_n\to\gamma, n\to\infty$.

ما ادعا می‌کنیم که $\gamma=0$ است. چون در غیر این صورت اگر $\gamma>0$ باشد، آنگاه وجود دارد n_0ی که به ازای $n\geq n_0$ نتیجه می‌دهد که $\gamma\leq\varepsilon_n\leq\gamma+\delta(\gamma)$ ، علاوه بر این به کمک تعریف عملگر انقباضی مر-کلر $\varepsilon_{n+1}<\gamma$ بنابراین $\varepsilon_{n+1}\leq\varepsilon_n$ می‌گردد که تناقض با رابطه بالاست. بنابراین $\gamma=0$ و از آنجا $\varepsilon_n\to 0, n\to\infty$. چون دنباله $\{\Omega_n\}$ تو در تو است لذا از شرط (۶) تعریف ۱-۱، نتیجه می‌گیریم که $\Omega_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n\neq\emptyset$ و همچنین در Ω بسته و محدب می باشد. علاوه بر این می‌دانیم که Ω_∞ عضوی از $\ker\mu$ است. بنابراین C_∞ فشرده بوده و تحت نگاشت T تغییرناپذیر(پایا) است. از قضیه ۱-۲ نتیجه می‌شود که T دارای نقطه ثابت در C_∞ است و چون $C_\infty\subset C$، اثبات تمام است.

اکنون فرض می‌کنیم

$$Fix(T)=\{x\in\Omega: Tx=x\}$$

و

$$\varepsilon_0=\mu(Fix(T))+\varphi\big(\mu(Fix(T))\big).$$

اگر $\varepsilon_0\neq 0$، آنگاه بوسیله (۲) و $T(Fix(T))=Fix(T)$ داریم

$$\begin{aligned}&\mu(Fix(T))+\varphi\big(\mu(Fix(T))\big)=\\&\mu(T(Fix(T)))+\varphi\big(\mu(T(Fix(T)))\big)\\&<\varepsilon_0\\&=\mu(Fix(T))+\varphi\big(\mu(Fix(T))\big),\end{aligned}$$

که به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین $\varepsilon_0=0$ و $Fix(T)$ نسبتاً فشرده است و چون T تابع پیوسته، لذا مجموعه نقاط ثابت T در Ω فشرده می‌باشد.

۲-۳. تبصره: فرض کنید دررابطه (2) برای قضیه ۲-۲، $\varphi\equiv 0$ اختیار گردد، آنگاه قضیه ۲-۲ در [2] بدست می‌آید.

۲-۴. گزاره: فرض کنید Ω زیر مجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای باناخ E و μ یک اندازه نافشردگی روی Eباشد. و همچنین $T:\Omega\longrightarrow\Omega$ و $\varphi:R_+\longrightarrow R_+$ دو تابع پیوسته باشند، اگر برای $k\in(0,1)$ داشته باشیم

$$\begin{aligned}&\mu(TX)+\varphi\big(\mu(TX)\big)\leq\\&k\big[\mu(X)+\varphi\big(\mu(X)\big)\big],\end{aligned}\qquad(۳)$$

آنگاه T یک تابع گسترش یافته مر-کلر است.

اثبات: با فرض برقراری(۳)، آنگاه برای هر $\varepsilon>0$ می‌توان به سادگی نشان داد که رابطه (۲) با $\delta(\varepsilon)=(\frac{1}{k}-1)\varepsilon$ برقرار است، لذا T یک تابع گسترش یافته مر-کلرمی باشد.

۲-۵. تبصره: با قرار دادن $\varphi\equiv 0$ در گزاره ۲-۴، قضیه نقطه ثابت داربو بدست می‌آید.

۲-۶. قضیه: فرض کنید Ω زیر مجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای باناخ E و μ یک اندازه نافشردگی روی E باشد. و همچنین $T:\Omega\longrightarrow\Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد و تابع $\theta:R_+\longrightarrow R_+$ وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

i. $\theta(0)=0\,,\theta(t)>0,\forall t>0;$

ii. θ ناکاهشی و پیوسته از راست است.

iii. $\forall\varepsilon>0\,,\exists\,\delta(\varepsilon)>0\,;\ \forall X\subset\Omega$ داشته باشیم

$$\begin{aligned}&\varepsilon\leq\theta\big[\mu(X)+\varphi\big(\mu(X)\big)\big]<\varepsilon+\delta\Longrightarrow\\&\theta\big[\mu(TX)+\varphi\big(\mu(TX)\big)\big]<\varepsilon\end{aligned}$$

آنگاه T یک تابع گسترش یافته مر-کلر است.

اثبات: فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد، از (i) نتیجه می‌شود که $\theta(\varepsilon)>0$ وجود دارد $\gamma>0$ به طوریکه برای هر زیر مجموعه کراندار X از Ω داریم

$$\begin{aligned}&\theta(\varepsilon)\leq\theta\big[\mu(X)+\varphi\big(\mu(X)\big)\big]<\theta(\varepsilon)+\\&\gamma\Longrightarrow\theta\,[\mu(TX)+\varphi\big(\mu(TX)\big)]<\theta(\varepsilon).\end{aligned}$$

از پیوستگی سمت راست θ، وجود دارد $0 < \delta$ بطوریکه

$$\theta(\varepsilon+\delta) < \theta(\varepsilon) + \gamma.$$

با $X \subseteq \Omega$ و از $\varepsilon \leq \mu(X) + \varphi(\mu(X)) < \varepsilon + \delta$

چون θ یک تابع ناکاهشی است در این صورت داریم

$$\theta(\varepsilon) \leq \theta[\mu(X) + \varphi(\mu(X))] < \theta(\varepsilon+\delta) < \theta(\varepsilon) + \delta$$

علاوه بر این، $\theta[\mu(TX) + \varphi(\mu(TX))] < \theta(\varepsilon)$
و بدین ترتیب می توان نوشت

$$\mu(TX) + \varphi(\mu(TX)) < \varepsilon.$$

۳. حل پذیری دستگاه معادلات دیفرانسیل درجه دو نامتناهی در فضای C

دستگاه معادلات یفرانسیل درجه دو نامتناهی زیررا مورد توجه قرار می دهیم:

$$\begin{cases} x_i''(t) = -f_i(t, x_1, x_2, x_3, \cdots), \\ x_i(0) = x_i(1) = 0, t \in [0,1], \\ i = 1,2,3\cdots \end{cases} \tag{۴}$$

فرض کنید $C(I) = C([0,1], R)$ بیانگر فضای همه توابع حقیقی پیوسته روی فاصله $I = [0,1]$ و فرض کنید $C^2(I) = C^2([0,1], R)$ کلاس همه توابع با مشتقات پیوسته مرتبه دوم روی I باشند. یک تابع $x \in C^2(I, R)$ جواب مساله (۴) است اگر و فقط اگر $x \in C(I)$ یک جواب دستگاه معادلات انتگرال نامتناهی زیر باشد:

$$\begin{cases} x_i(t) = \int_0^1 G(t,s) f_i(s, x(s)) ds, \\ i = 1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{۵}$$

جائیکه $f_i(t,x) \in C(I)$ به ازای $i=1,2,3,\ldots$ و $t \in I$ همچنین تابع گرین[1] در (۵) بوسیله رابطه زیر داده می‌شود. (به $[11,6]$مراجعه گردد)

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{۶}$$

در این پژوهش، ما وجود جواب دستگاه نامتناهی (۴) را برای فضای C گسترش می‌دهیم. جائیکه C فضای همه دنباله‌های $x = (x_n)$ همگرا به حد متناهی با نرم زیر می‌باشد:

$$\|x\|_C = \|(x_n)\|_C = Sup\{|x_n| : n = 1,2,3,\ldots\}.$$

همچنین، فضای C با نرم $\|.\|_C$ یک فضای باناخ است. در فضای باناخ $(C, \|.\|_C)$ مناسب ترین اندازه نافشردگی μ می‌تواند به صورت زیر ارائه گردد (ببینید [5]).

$$\mu(B) = \lim_{p\to\infty}[\sup_{x\in B}\{\sup\{|x_n - x_m| : n, m \geq p\}\}]$$

جائیکه

$$x(t) = (x_i(t)) = (x_1(t), x_2(t), \cdots) \in C, \forall t \in [0,1], B \in M_C .$$

اندازه μ منظم می‌باشد. در ادامه به چندی از مطالب به عنوان فرضیات می‌پردازیم.

$(a1)$. توابع f_i روی $I \times R^\infty$ تعریف می‌شوند که دارای مقادیر حقیقی‌اند. عملگر f به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$f : I \times C \to C$$
$$(t,x) \to (fx)(t) = (f_1(t,x), f_2(t,x), \cdots)$$

که کلاس همه توابع $((fx)(t))_{t\in I}$ برای $t \in I$، برای هر نقطه درفضای C هم پیوسته‌اند.

$(a2)$. نامساوی زیر برقرار است:

$$|f_n(t, x_1, x_2, \cdots)| \leq b_n(t) \sup_{i,j\geq n} |x_i(t) - x_j(t)|$$

جائیکه $b_n(t)$ تابع حقیقی، پیوسته روی I می‌باشد بطوریکه دنباله $(b_n(t))$ هم کراندار روی I و داریم

$$B = \sup_{t\in I, n\in\mathbb{N}} \{b_n(t)\} \leq 4.$$

1. Green

$(a3)$. تابع $\theta: R_+ \to R_+$ ناکاهشی، از راست پیوسته بطوریکه برای هر $\lambda \geq 0$ داریم $\theta(\lambda t) \leq \lambda\theta(t)$، $\theta(0) = 0$ و $\theta(t) > 0$ برای هر $t>0$.

۳-۱. قضیه: تحت فرضیات $(a1)$ الی $(a3)$، دستگاه نامتناهی (۴) حداقل یک جواب به صورت

$$x(t) = (x_i(t)) = (x_1(t), x_2(t), \cdots)$$

در فضای C روی فاصله I دارد.

اثبات: برای همه $x(t) = (x_i(t)) \in C$ و $t \in I$، داریم $\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i(t)| \leq k < \infty$ که در آن k عدد حقیقی مثبت است. با استفاده از (۶) و $(a2)$ برای هر $t \in I$ می توان نوشت،

$$\| x(t) \|_c = \max_{k\geq 1} \left| \int_0^1 G(t,s) f_k(s, x(s)) ds \right|$$

$$\leq \max_{k\geq 1} \int_0^1 \left| G(t,s) f_k(s, x(s)) \right| ds$$

$$\leq \max_{k\geq 1} \int_0^1 G(t,s) \left\{ b_k(t) \sup_{i,j\geq k} |x_i(t) - x_j(t)| \right\} ds$$

$$\leq \max_{k\geq 1} \left\{ B \int_0^1 G(t,s) \sup_{i,j\geq k} |x_i(t) - x_j(t)|\ ds \right\}$$

$$\leq \frac{kB}{4} = r,$$

بنابراین $\|x(t)\|_C \leq r$.

فرض کنید $x^0(t) = (x_i^0(t))$، جائیکه $x_i^0(t) = 0$. برای هر $t \in I$.

چون $\bar{B} = \bar{B}(x^0, r_1)$ گوی بسته به مرکز x_0 و شعاع $r_1 \leq r$ می‌باشد پس $\bar{B}$ ناتهی، بسته، کراندارو زیر مجموعه محدب از C است. عملگر $T = (T_i)$ روی $C(I, \bar{B})$ به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$(Tx)(t) = \{(T_i x)(t)\} = \{\int_0^1 G(t,s) f_i(s, x(s)) ds\}$$

که در آن $x(t) = (x_i(t)) \in \bar{B}$ و $x_i(t) \in C(I)$.

چون $f_i(t, x(t)) \in C, \forall t \in I$ در این صورت حد زیر متناهی و یکتاست:

$$\lim_{i\to\infty} (T_i x)(t) = \lim_{i\to\infty} \int_0^1 G(t,s) f_i(s, x(s)) ds = \int_0^1 G(t,s) \lim_{i\to\infty} f_i(s, x(s)) ds$$

از اینرو $(Tx)(t) \in C$.

همچنین $(T_i x)(t)$ در شرایط کرانداری صدق می‌کند.

$$(T_i x)(0) = \int_0^1 G(0,s) f_i(s, x(s)) ds = \int_0^1 (0) f_i(s, x(s) ds = 0,$$

$$(T_i x)(1) = \int_0^1 G(1,s) f_i(s, x(s)) ds = \int_0^1 (0) f_i(s, x(s) ds = 0.$$

چون $\|(Tx)(t) - x^0(t)\|_C \leq r$ بنابراین T یک خود نگاشت روی $\bar{B}$ است وبا فرض $(a1)$. روی $C(I, \bar{B})$ پیوسته می‌باشد. اکنون می‌بایست نشان دهیم که T یک عملگرانقباضی از نوع مر-کلر است.

برای $\varepsilon > 0$، ما باید $\delta > 0$ پیدا کنیم که در

$$\varepsilon \leq \theta(\mu(\bar{B})) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \theta(\mu(T\bar{B})) < \varepsilon$$

صدق کند. بدین منظور به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\theta(\mu(T\bar{B})) = \theta(\lim_{p\to\infty} [\sup_{x(t)\in\bar{B}} \{ \sup_{m,n\geq p} \left| \int_0^1 G(t,s) f_m(s, x(s)) ds - \int_0^1 G(t,s) f_n(s, x(s)) ds \right| \}])$$

$$\leq \theta(\lim_{p\to\infty} [\sup_{x(t)\in\bar{B}} \{ \sup_{m,n\geq p} \int_0^1 G(t,s) \left| f_m(s, x(s)) - f_n(s, x(s)) \right| ds \}])$$

$$\leq \theta(\lim_{p\to\to\infty} [\sup_{x(t)\in\bar{B}} \sup_{m,n\geq p} \int_0^1 G(t,s) \{ \left| f_m(s, x(s)) \right| + \left| f_n(s, x(s)) \right| ds \}])$$

$$\leq \theta(\lim_{p\to\to\infty} [\sup_{x(t)\in\bar{B}} \sup_{n\geq p} \int_0^1 G(t,s) \{ (2b_n(t) \sup_{i,j\geq n} |x_i(t) - x_j(t)|) \} ds])$$

بدین ترتیب با توجه به نامساوی بالا با در نظر گرفتن $\frac{B}{4}\theta(\mu(\bar{B})) < \varepsilon$ داریم، $\theta(\mu(\bar{B})) < \frac{4\varepsilon}{B}$ و از آنجا می‌توان $0 < \delta = (\frac{4}{B} - 1)\varepsilon$ اختیار کرد که در این صورت نا مساوی $\varepsilon < \theta(\mu(\bar{B})) < \varepsilon + \delta$ برقرار می شود.

علاوه بر این، T یک عملگر انقباضی مر-کلر روی $\bar{B} \subset C$ است. بنابراین T در شرایط قضیه ۲-۲. و رابطه (۲) با $\varphi \equiv 0$ صدق می‌کند و این نتیجه می دهد که T دارای نقطه ثابت در $\bar{B}$ می‌باشد. از شرط (۱) جواب دستگاه (۴) وجود دارد.

۳-۲. مثال: دستگاه نامتناهی معادلات دیفرانسیل مرتبه دو زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_i''(t)+\sum_{m=i}^{\infty}\left(x_m(t)-x_i(t)\right)\sin\frac{1}{m^2}=0, \\ \forall i\in\mathbb{N}, t\in I=[0,1], \\ x_i(0)=x_i(1)=0. \end{cases} \qquad (۷)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق حالت خاصی از (۴) است که در آن

$$f_i(t,x(t))=\sum_{m=i}^{\infty}\left(x_m(t)-x_i(t)\right)\sin\frac{1}{m^2},$$

اگر $x(t)\in C$ آنگاه

$$\lim_{i\to\infty} f_i(t,x(t))= \lim_{i\to\infty}\left[\sum_{m=i}^{\infty}\left(x_m(t)-x_i(t)\right)\sin\frac{1}{m^2}\right]=0$$

علاوه بر این $f_i(t,x(t))\in C$. فرض کنید $\varepsilon>0$ دلخواه و $x(t),y(t)\in C$ با شرط $\|x(t)-y(t)\|_C\le\delta=\frac{2\varepsilon}{\pi^2}$ باشد، در این صورت می‌توان نوشت،

$$\left|f_i(t,x(t))-f_i(t,y(t))\right|= \left|\sum_{m=i}^{\infty}(x_m(t)-x_i(t))\sin\frac{1}{m^2}-\sum_{m=i}^{\infty}(y_m(t)-y_i(t))\sin\frac{1}{m^2}\right|$$

$$\le\sum_{m=i}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{m^2}\right)\left\{\begin{matrix}|x_m(t)-y_m(t)|+\\ |x_i(t)-y_i(t)|\end{matrix}\right\}$$

$$\le\sum_{m=i}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left\{|x_m(t)-y_m(t)|+|x_i(t)-y_i(t)|\right\}$$

$$\le 2\delta\sum_{m=i}^{\infty}\frac{1}{m^2}<2\delta\frac{\pi^2}{6}<\varepsilon$$

علاوه بر این $f_i(t,x(t))$ هم پیوسته روی C به ازای هر i است و داریم

$$\left|f_i(t,x(t))\right|\le \sum_{m=i}^{\infty}\left(x_m(t)-x_i(t)\right)\sin\frac{1}{m^2}$$

$$\le\sum_{m=i}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left|x_m(t)-x_i(t)\right|$$

$$\le\sup_{k,p\ge i}\left|x_k(t)-x_p(t)\right| \sum_{m=i}^{\infty}\frac{1}{m^2}\le\frac{\pi^2}{6}\sup_{k,p\ge i}\left|x_k(t)-x_p(t)\right|$$

$$\le b_i(t)\sup_{k,p\ge i}\left|x_k(t)-x_p(t)\right|$$

جائیکه $b_i(t)=\frac{\pi^2}{6}$ پیوسته و هم کراندار روی I در نظر گرفته می‌شود، همچنین $B=\sup_{k,p\ge i}\{b_i(t)\}=\frac{\pi^2}{6}\le 4$ بدین ترتیب به کمک قضیه ۳-۱، دستگاه (۷) دارای جواب یکتا در فضای C می‌باشد.

References

[1] R. P. Agarwal, D. O'Regan, Fixed point theory and applications, Cambridge University Press(2004).

[2] A. Aghajani, M. Mursaleen and A. Shole Haghighi, Fixed point theorems for Meir-Keeler condensing operators via measure of noncompactness, Acta. Math. Sci. 35(3)(2015) 552-566.

[3] C. Alegre, J. Marn, S.Romaguera; A Fixed point theorem for generalized contractions involving w-distances on complete quasi-metric spaces, Fixed Point Theory and Applications 2014, 2014;40.

[4] J.Banas, D. O'Regan, K.Sadarangi, On solutions of a quadratic Hammerstein integral equation on an unbounded interval, Dynam. Systems Appl.18 (2009), 251-264.

[5] J.Banas, M. Lecko, Solvability of infinite systems of differential equations in Banach spaces, j. Compat. Appl. Math. 137(2001) 363-375.

[6] D .G .Duffy, Greens function with applications, Champan and Hall/CRC, London, 2001.

[7] J. Jachymski; Equivalent conditions and the Meir-Keeler type theorems. J. Math. Anal. Appl. 194, (1995) 293-303.

[8] A. Meir, E. Keeler; A theoremon contraction mappings. J. Math. Anal. Appl. 28, (1969) 326-329.

[9] C. Ming Chen, Fixed point theory for thr cyclic weaker Meir-Keeler function in complete metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2012:17 (2012), doi:10.1186/1687-1812-2013-17.

[10] C. Ming Chen, Fixed point theorems for cyclic Meir-Keeler type mappings in complete metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2012:41 (2012), doi: 10. 186/1687-1812-41.

[11] M. Mursaleen and Syed M. H. Rizvi, Solvability of infinite systems of second order differential equations in c_0 and ℓ_1 by Meir-Keeler condensing operators, Proc. Amer. Math. Soc. 144(10)(2016) 4279-4289.