دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره نهم، بهار ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

بسط سری انتگرال‌های وینر به کمک توابع بلاک پالس

بنت الهدا هاشمی[۱]، مرتضی خدابین [* ۲]

[(۱و۲)] گروه ریاضیات دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، کرج، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۱/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۱/۲۱

چکیده

در این مقاله یک روش عددی مناسب برای تقریب انتگرال‌های وینری که جواب دقیق آنها در دسترس نیست یا پیدا کردن جواب دقیق آنها فرآیند بسیار مشکلی است با استفاده از توابع پایه‌ای بلاک پالس معرفی می‌شود. تحلیل خطای روش ارائه می‌گردد. مثال‌های عددی ارائه شده مبین این است که این روش از دقت مطلوبی برخوردار می‌باشد. مزیت روش عددی مورد بحث، انعطاف پذیری و سادگی استفاده آن است.

واژه‌های کلیدی: حرکت براونی، انتگرال‌های وینر، توابع بلاک پالس.

*. عهده‌دار مکاتبات: E-mail: m-khodabin@kiau.ac.ir

۱- مقدمه

انتگرال وینر[1]، انتگرالی به شکل

$$\int_a^b f(t)\, dB(t,\omega), \quad (1)$$

است، بطوری‌که تابع $f(t)$، تابعی قطعی (به ω وابسته نیست) و $B(t,\omega)$ یک حرکت براونی است[۱]. در این مقاله به دنبال تقریب انتگرال‌های وینر توسط بسط سری توابع بلاک پالس هستیم که این توابع، پایه‌ای متعامد[2] برای فضای هیلبرت $L^2[a,b]$ است.

در این مقاله روند زیر را دنبال می‌کنیم. در ابتدا تابع انتگرالده[3] انتگرال‌های وینر را به کمک بسط سری[4] توابع متعامد یکه[5] فضای هیلبرت $L^2[a,b]$ تقریب می‌زنیم و سپس همگرایی سری فوق را به مقدار واقعی انتگرال بررسی می‌کنیم. سپس با معرفی توابع بلاک پالس، از آنها به منظور تقریب این انتگرال‌ها کمک می‌گیریم، بخصوص نوع خاصی از این دسته که دارای جواب دقیق نیستند. سپس در ادامه کران خطای روش عددی را بدست آورده و اثبات می‌کنیم نرخ همگرایی روش از مرتبه $O(h)$ است.

۲- بسط سری انتگرال‌های وینر توسط توابع متعامد یکه

اگر $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$، پایه‌ای متعامد یکه برای فضای هیلبرت $L^2[a,b]$ باشد، هر $f \in L^2[a,b]$ که تابعی انتگرالپذیر مربعی در بازه $[a,b]$ است را می‌توان به شکل سری زیر بسط داد:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} < f, \varphi_n > \varphi_n, \quad (2)$$

که $<.,.>$ ضرب داخلی در فضای $L^2[a,b]$ است و به شکل

$$< f, g >= \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

تعریف می‌شود.

ما اتحاد پارسوال[6] را به شکل زیر داریم:

$$\| f \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} < f, \varphi_n >^2., \quad (3)$$

اگر از طرفین رابطه (۲) انتگرال وینر بگیریم و ترتیب انتگرالگیری و جمع را عوض کنیم، خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(t) dB(t) = \sum_{n=1}^{\infty} < f, \varphi_n > \int_a^b \varphi_n(t) dB(t). \quad (4)$$

قضیه ۱- [۱] فرض کنید $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ پایه‌ای متعامد یکه برای فضای $L^2[a,b]$ باشد، آنگاه برای هر $f \in L^2[a,b]$، انتگرال وینر f، با احتمال ۱، دارای بسط سری زیر است:

$$\int_a^b f(t) dB(t) = \sum_{n=1}^{\infty} < f, \varphi_n > \int_a^b \varphi_n(t) dB(t), \quad (5)$$

که این سری تصادفی دارای همگرایی تقریباً حتمی است(a.s)[7].

با جایگزینی توابع بلاک پالس در سری (۴) (که پایه‌ای متعامد برای فضای هیلبرت $L^2[a,b]$ است) و با استفاده از قضیه (۱)، همگرایی انتگرال وینر به مقدار واقعی آن تقریباً حتمی (a.s)، خواهد بود.

۳- توابع بلاک پالس

تعریف ۱-[۲] مجموعه توابع بلاک پالس[8](BPFs) $\phi_i(t)$، به ازای $i = 1,2,\dots,m$، روی بازه $t \in [0,T)$، به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi_i(t) = \begin{cases} 1 & (i-1)h \le t < ih, \\ 0 & otherwise \end{cases},$$

که $h = \frac{T}{m}$.

با جایگذاری $\tau = \frac{(b-a)t}{T} + a$، بطوری‌که $t \in [0,T)$، تعریف مشابهی از BPFs با توجه به بازه دلخواه $[a,b)$ داریم.

برخی از خواص مهم توابع BPFs عبارتند از [۲]:

1. Wiener integrals
2. orthogonal functions
3. integrand
4. series expansion
5. orthonormal functions
6. Parseval identity
7. almost surely
8. Block pulse functions

- **جدایی پذیری:**

$$\phi_i(t)\phi_j(t)=\begin{cases}\phi_i(t) & i=j\,,\\ 0 & i\neq j\,,\end{cases}$$

که $i,j=0,1,2,\ldots,m$.

- **تعامد:**

$$\int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)dt=\begin{cases}h & i=j,\\ 0 & i\neq j\,,\end{cases}$$

که $i,j=1,2,\ldots,m$.

- **کامل بودن:** وقتی $m\to\infty$، برای هر $f\in L^2[0,T)$ داریم:

$$\int_0^T f^2(t)dt=\sum_{i=1}^{\infty} {f_i}^2 \parallel \phi_i(t)\parallel^2,$$

که

$$f_i=\frac{1}{h}\int_0^T f(t)\phi_i(t)dt, \qquad (۶)$$

ضرایب BPFs با توجه به $\phi_i(t)$ هستند و $\parallel \phi_i(t)\parallel$ $=\left(\int_0^T \phi_i^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$ نرم تابع $\phi_i(t)$ است.

در تعریف بالا توابع BPFs متعامد یکه نیستند. به همین دلیل مجموعه توابع متعامد یکه $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ با تقسیم $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر نرمشان حاصل می‌گردند. بنابراین داریم:

$$\varphi_i(t)=\frac{1}{\sqrt{h}}\phi_i(t).$$

از ویژگی متعامد یکه بودن توابع $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$، می‌توان توابع دلخواه را با سری بلاک پالس تقریب زد. بنابراین هر تابع دلخواه کراندار حقیقی مقدار $f(t)$ که انتگرالپذیر مربعی در بازه $[0,T)$ است مطابق رابطه (۲)، با سری بلاک پالس تقریب زده می‌شود. بنابراین در این بازه داریم:

$$f(t)\simeq \hat{f}_m(t)=\sum_{i=1}^{m} <f,\varphi_i(t)> \varphi_i(t)=\sum_{i=1}^{m} f_i\phi_i(t). \qquad (۷)$$

۴- تقریب انتگرال‌های وینر بر مبنای توابع BPFs

برای تقریب انتگرال‌های وینر در بازه $[0,T)$ توسط توابع BPFs با توجه به رابطه (۷) داریم:

$$\int_0^T f(t)dB(t)\simeq \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{m}\int_{(i-1)h}^{ih} f(t)\phi_i(t)dt \int_{(i-1)h}^{ih} \phi_i(t)dB(t) =\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{m}\Big(B(ih)-B\big((i-1)h\big)\Big)\int_{(i-1)h}^{ih} f(t)dt.$$

همگرایی سری تصادفی بالا هنگامی‌که $m\to\infty$ با توجه به قضیه (۱) تضمین شده خواهد شد.

۵- تحلیل خطا

از آنجاکه از توابع BPFs به منظور تقریب انتگرال‌های وینر کمک گرفته‌ایم، شایسته است که کران بالای خطای روش تقریبی را نیز محاسبه نماییم.

قضیه ۲- [۳] فرض کنید تابع $f(t)$، تابعی انتگرالپذیر مربعی در بازه $t\in I=[0,1)$ باشد و $e(t)=f(t)-\hat{f}_m(t)$، بطوری‌که $\hat{f}_m(t)=\sum_{i=1}^{m} f_i\phi_i(t)$ سری بلاک پالس تابع $f(t)$ است. آنگاه داریم:

$$\parallel e(t)\parallel\leq \frac{h}{2\sqrt{3}}\sup_{t\in I}|f'(t)|, \qquad (۹)$$

که $\parallel e(t)\parallel=\left(\int_0^1 |e(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

قضیه۳- فرض کنید تابع $f(t)\in L^2[0,1)$، یک تابع دلخواه باشد و $e_m(f)=\int_0^1 e(t)dB(t)$ خطای تقریب عددی انتگرال وینر بر مبنای توابع BPFs باشد. آنگاه داریم:

$$|e_m(f)|\leq \frac{M\times h}{2\sqrt{3}}\sup_{t\in I=[0,1)}|f'(t)|, \qquad (۱۰)$$

که M کران بالای $|B(1)|$ است.

اثبات:

می‌توانیم بنویسیم:

$$|e_m(f)|=|\int_0^1 e(t)dB(t)|,$$

بنابراین

$$|e_m(f)|\leq\parallel e(t)\parallel_\infty\times|B(1)|,$$

که

$$\| e(t) \|_\infty = \sup_{t\in I=[0,1)} |e(t)|.$$

از آنجاکه $B(1)\sim N(0,1)$، آنگاه $P\{\omega: |B(1,\omega)| < M\} = 1$، بطوری‌که $M \geq 4$، بنابراین با احتمال تقریباً یک (a.s)، $B(1)$کراندار است. از قضیه (۲) داریم:

$$|e_m(f)| \leq \frac{M\times h}{2\sqrt{3}} \sup_{t\in I}|f'(t)|.$$

برخی مواقع ناچاریم که ضرایب BPFs رابطه (۶) را تقریب بزنیم، زیرا که انتگرال‌هایی هستند که مقادیر دقیق آنها معلوم نیست. بنابراین یک روش عددی مناسب را انتخاب می‌کنیم. به عنوان مثال می‌توانیم از قاعده ذوزنقه‌ای[1] استفاده کنیم. بدین ترتیب دچار خطایی می‌شویم که کران خطای ایجاد شده را در لم زیر بدست آورده‌ایم.

لم ۱- فرض کنید تابع $f(t)$ بوسیله توابع BPFs در بازه I=[0, 1) به شکل زیر تقریب زده شده باشد:

$$\hat{f}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i\phi_i(t),$$

و با قاعده ذوزنقه‌ای، $\bar{f}_i$، به عنوان تقریب f_i باشد، قرار می‌دهیم:

$$\bar{f}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \bar{f}_i\phi_i(t).$$

بنابراین داریم:

$$\| \hat{f}_m(t) - \bar{f}_m(t) \| \leq \frac{h^2}{12}\sup_{t\in I}|f''(t)|.$$

اثبات: بوسیله توابع BPFs داریم:

$$\| \hat{f}_m(t) - \bar{f}_m(t) \|^2 = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{m} (f_i-\bar{f}_i)\phi_i(t)\right)^2 dt$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (f_i-\bar{f}_i)^2\left(\int_0^1 \phi_i(t)^2 dt\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} h(f_i-\bar{f}_i)^2 \leq \left(\frac{h^2}{12}\sup_{t\in I}|f''(t)|\right)^2,$$

یا

$$\| \hat{f}_m(t) - \bar{f}_m(t) \| \leq \frac{h^2}{12}\sup_{t\in I}|f''(t)|.$$

فرض کنید ضرایب BPFs را با برخی از روش‌های عددی تقریب زده باشیم، بنابراین $\bar{f}_m(t)$ تقریب نهایی $f(t)$ است. آنگاه داریم:

$$\| f(t) - \bar{f}_m(t) \| \leq \| f(t) - \hat{f}_m(t) \| + \| \hat{f}_m(t) - \bar{f}_m(t) \|.$$

با توجه به رابطه بالا، اگر به عنوان مثال از قاعده ذوزنقه ای استفاده کنیم، نرخ تقریب $O(h)$ باقی می‌ماند.

۶- برخی مثال‌های عددی

به منظور تبیین بهتر روش، مثال‌های زیر را می‌آوریم که m تعداد توابع BPFs است. نتایج با نرم افزار Mathematica 9 بدست آمده است.

۶-۱- مثال ۱

در زیر مثالی آورده می‌شود که دارای جواب تحلیلی[2] $\int_0^1 Sin(t)\ dB(t)$ را در نظر بگیرید. به منظور محاسبه مقدار آن، توسط فرمول ایتو [۴] داریم:

$$\int_0^1 Sin(s)\ dB(s) = B(1)Sin(1) - \int_0^1 B(s)Cos(s)\ ds,$$

که $\int_0^1 B(s)Cos(s)ds$ را با مجموع ریمان[3] محاسبه می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\int_0^1 B(s)Cos(s)\ ds = \sum_{i=1}^{m} (B(t_i)Cos(t_i))(t_{i+1}-t_i).$$

از طرف دیگر با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله، مقدار $\int_0^1 Sin(t)\ dB(t)$ به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_0^1 Sin(t)\ dB(t) \simeq$$

1. Trapezoidal rule
2. Analytical solution
3. Riemann sum

$$\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{m}\Big(B(nh)-B\big((n-1)h\big)\Big)\int_{(n-1)h}^{nh} Sin(t)\ dt.$$

میانگین خطای قدر مطلق به ازای تعداد متفاوتی از توابع BPFs و به ازای ۱۰۰۰ تکرار در جدول (۱) آورده شده است.

۶-۲- مثال ۲

$\int_0^1 Sin(t^2)\, dB(t)$ را در نظر بگیرید که جواب دقیق آن موجود نمی‌باشد. بنابراین مقدار آن را با روش این مقاله به شکل زیر تقریب می‌زنیم:

$$\int_0^1 Sin(t^2)\, dB(t) \simeq \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{m}\Big(B(nh)-B\big((n-1)h\big)\Big)\int_{(n-1)h}^{nh} Sin(t^2)\ dt.$$

به منظور تقریب جواب، ما همچنین نیاز داریم که ضرایب BPFs را نیز تقریب بزنیم. اگر از قاعده ذوزنقه‌ای استفاده کنیم، نتایج را به ازای تعداد متفاوتی از توابع BPFs و با ۱۰۰۰۰ تکرار در جدول (۲) مشاهده می‌کنید که $\bar{X}$ میانگین جواب و S انحراف معیاراست.

جدول ۱- میانگین خطا،$\bar{X}_E$، انحراف معیار خطا ،S_E، و فاصله اطمینان برای میانگین خطای مثال ۱ با ۱۰۰۰تکرار.

			فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین خطا	
m	$\bar{X}_E$	S_E	کران پایین	کران بالا
16	0.013604961	0.010775999	0.012936259	0.014273662
32	0.007012443	0.005351982	0.006680327	0.007344558
64	0.003338795	0.002563374	0.003179726	0.003497864
256	0.000877757	0.000657816	0.000836937	0.000918578
512	0.000422929	0.000312831	0.000403516	0.000442341

جدول ۲- میانگین،$\bar{X}$، انحراف معیار،S و فاصله اطمینان برای میانگین جواب مثال ۲ با ۱۰۰۰۰تکرار.

			فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین جواب	
m	$\bar{X}$	S	کران پایین	کران بالا
16	0.000001238	0.001376020	-0.000025735	0.000028210
32	0.000000632	0.000346126	-0.000006153	0.000007416
64	0.000000883	0.000086040	-0.000000804	0.000002569
128	-0.000000337	0.000021459	-0.000000758	0.000000083
256	-0.000000017	0.000005342	-0.000000121	0.000000088
512	-0.000000005	0.000001335	-0.000000031	0.000000021

۶-۳- مثال ۳

جواب دقیق $\int_0^1 \frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t^2}\, dB(t)$ موجود نیست. مقدار آن را می‌توان با استفاده از BPFs به شکل زیر بدست آورد:

$$\int_0^1 \frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t^2}\, dB(t) \simeq \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{m}\ (B(nh)- B((n-1)h))\int_{(n-1)h}^{nh} \frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t^2}\, dt.$$

به منظور تقریب جواب ما همچنین نیاز داریم که ضرایب BPFs را نیز تقریب بزنیم. اگر از قاعده ذوزنقه‌ای استفاده کنیم، نتایج را به ازای تعداد متفاوتی از توابع BPFs و با ۱۰۰۰۰ تکرار در جدول (۳) مشاهده می‌کنید.

جدول ۳- میانگین،$\bar{X}$، انحراف معیار،S و فاصله اطمینان برای میانگین جواب مثال ۳ با ۱۰۰۰۰تکرار.

m	$\bar{X}$	S	فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین جواب	
			کران پایین	کران بالا
16	-0.000012767	0.001596980	-0.000044070	0.000018537
32	-0.000000825	0.000397130	-0.000008609	0.000006959
64	-0.000001193	0.000101704	-0.000003187	0.000000800
128	-0.000000016	0.000025079	-0.000000508	0.000000475
256	0.000000013	0.000006294	-0.000000109	0.000000137
512	0.000000006	0.000001576	-0.000000024	0.000000037

۷- نتیجه‌گیری

بعضی مواقع سخت یا غیرممکن است که بتوان جواب دقیق انتگرال‌های وینر را پیدا کرد. در این مقاله با استفاده از توابع BPFs جواب تقریبی آنها را یافتیم. تحلیل خطای روش در کنار مثال‌ها نشاندهنده دقت روش ماست.

فهرست منابع

[1] H. Kuo, Introduction to Stochastic Integration, Universitext (UTX), Springer, New York, 2006.

[2] Z.H. Jiang، W. Schaufelberger, Block Pulse Functions and their Applications in Control Systems, Springer-Verlag, 1992.

[3] M. Khodabin, K. Maleknejad, M. Rostami, M. Nouri, Numerical approach for solving stochastic Volterra-Fredholm integral equations by stochastic operational matrix, Computers and Mathematics with Applications, 64 (2012), 1903-1913.

[4] B. Oksendal, Stochastic Differential Equations, 5th edition, Springer, 2000.