دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره هشتم، زمستان ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

بررسی خواص آنتروپی عملگری نسبی پارامتری

اسماعیل نیکوفر *

استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۰/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۱۱/۳۰

چکیده

مفهوم آنتروپی در سال ۱۸۵۰ توسط کلاسیون تعریف شده است و برخی مفاهیم آن توسط بولتزانو و گیبس تعمیم داده شد. پس از آن چندین تعمیم از این مفهوم با انگیزه‌های متفاوت و کاربردها در موضوعات مختلف مانند مکانیک استاتیک، نظریه اطلاعات، سیستم‌های دینامیکی داده شد. فوجی و کامی آنتروپی عملگری نسبی را تعریف کردند و فوروتا مفهوم آنتروپی عملگری نسبی پارامتری را به عنوان تعمیم مفهوم آنتروپی عملگری نسبی ارائه کرد. این مفاهیم به صورت چشم انداز برخی توابع ساده قابل توصیف هستند و این توصیف مطالعه آن‌ها را ساده می‌کند. آنتروپی عملگری نسبی تابعی مقعر است و آنتروپی عملگری نسبی پارامتری برای برخی از پارامترهای مناسب مقعر خواهد بود. در این مقاله برخی خواص آنتروپی عملگری نسبی پارامتری از جمله کران‌های آن را مطالعه می‌کنیم. این کران‌ها، کران‌های آنتروپی عملگری نسبی که قبلاً توسط نویسندگان دیگر محاسبه شده‌اند را تعمیم خواهد داد و در حالت خاص نتایج قبلی را نتیجه خواهد داد.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی عملگری نسبی، آنتروپی عملگری نسبی پارامتری، چشم انداز.

*. Email: nikoufar@pnu.ac.ir

۱. مقدمه

در سراسر این مقاله $B(H)$ نشانگر C^*−جبر توابع خطی کراندار روی فضای هیلبرت H با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ می‌باشد. اگر A یک عملگر خود الحاق در $B(H)$ باشد، آن را مثبت گوییم هرگاه به ازای هر $h \in H$، $\langle Ah, h\rangle \geq 0$ و می نویسیم $A \geq 0$. علاوه بر آن اگر A معکوس‌پذیر باشد می‌گوییم A اکیداً مثبت است و می‌نویسیم $A > 0$. برای عملگرهای A و B در $B(H)$ می‌نویسیم $A \geq B$ هرگاه $A - B \geq 0$ [۱].

تابع پیوسته حقیقی f روی بازه I محدب عملگری است هرگاه برای عملگرهای خود الحاق A و B با طیف در I و برای هر $\alpha \epsilon [0,1]$ داشته باشیم:

$$f\big(\alpha A + (1-\alpha B)\big) \leq \alpha f(A) + (1-\alpha) f(B).$$

تابع کلاسیک چشم‌انداز[1] وابسته به تابع f که در مجموعه محدب $C \subseteq R^n$ تعریف شده یک تابع دو متغیره روی زیر مجموعه زیر است:

$$K = \left\{(t,s) \,\middle|\, s > 0\,, \frac{t}{s} \in C\right\} \subseteq R^{n+1}$$

و به صورت $P_f(t,s) = f\left(\frac{t}{s}\right) s$ تعریف می‌شود. در سال ۲۰۰۸ افروس[2] در [۲] چشم‌انداز عملگرهای جابجایی را مطرح کرد و نشان داد که چشم‌انداز یک تابع دو متغیره عملگری، محدب است. فرض کنیم A و B عملگرهای اکیداً مثبت ناجابجایی باشند. تابع چشم انداز دو متغیره عملگری به صورت زیر در [۳] تعریف شده است:

$$P_f(A,B) = B^{\frac{1}{2}} f\left(B^{-\frac{1}{2}} AB^{-\frac{1}{2}}\right) B^{\frac{1}{2}}$$

و ثابت شده است که این تابع محدب است. فوجی و کامی در [۴] و [۵] مفهوم آنتروپی عملگری نسبی را برای عملگرهای اکیداً مثبت A و B به‌صورت زیر تعریف کردند:

$$S(A|B) = B^{\frac{1}{2}}\left(lnB^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)B^{\frac{1}{2}}.$$

مفهوم آنتروپی عملگری نسبی وابسته به پارامتر $q \in \mathbb{R}$ برای عملگرهای اکیداً مثبت A و B در [۶] توسط فوروتا به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$S_q(A|B) = B^{\frac{1}{2}}(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})^q(lnB^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})B^{\frac{1}{2}}.$$

در حالت خاص هرگاه $q = 0$، در آن صورت آنتروپی عملگری نسبی حاصل می‌شود. به‌عبارت دیگر

$$S_0(A|B) = S(A|B).$$

همچنین یک بررسی ساده نشان می‌دهد

$$S_1(B|A) = -S(A|B).$$

توجه کنیم که آنتروپی عملگری نسبی $S(A|B)$ چشم انداز تابع $logt$ است؛ یعنی،

$$S(A|B) = P_{logt}(A|B).$$

همچنین آنتروپی عملگری نسبی پارامتری $S_q(A|B)$ چشم انداز تابع $t^q\, logt$ است به این مفهوم که

$$S_q(A|B) = P_{t^q logt}(A|B).$$

دراگومیر[3] در [۷] برخی از کران‌های تفاضل

$$S(A|B) - \frac{ln\, m}{M-m}(MA - B) - \frac{ln\, M}{M-m}(B - mA)$$

را برای عملگرهای اکیداً مثبت A و B و مقادیر مشخص $0 < m < M$ در حالی که $mB < A < MB$ به دست آورد. وی با استفاده از این واقعیت که در حالت کلی $S(A|B)$ و $S(B|A)$ با هم برابر نیستند در [۸] برخی از کران‌های تفاضل

$$\frac{mln\, m}{M-m}(MA - B) + \frac{Mln\, M}{M-m}(B - mA) + S(B|A)$$

را با همان مفروضات مساله قبل به دست آورد. در این مقاله کران‌های بالا و پایین آنتروپی عملگر نسبی وابسته به پارامتر q را به دست می‌آوریم. فرض کنیم $0 \leq q \leq 1$. تابع f با ضابطه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$f(t) = t^q\, lnt$$

که در آن lnt تابع لگاریتم طبیعی است. تعریف می‌کنیم

$$D_q := \{t > 0 : f''(t) \leq 0\}.$$

در این صورت واضح است که تابع f روی D_q مقعر است. یک محاسبه ساده نشان می‌دهد:

$$D_q = [e^{\frac{2q-1}{q(q-1)}}, +\infty)\ .$$

در نتیجه هرگاه $q \to 0$ در آن صورت $D_0 = (0, +\infty)$.

لم ۱: تابع $f(t) = t^q\, lnt$ روی بازه

1. Perspective
2. Effros
3. Dragomir

$$D_q = [e^{\frac{2q-1}{q(q-1)}}, +\infty)$$

مقعر است.

به عنوان یک نتیجه ساده ملاحظه می‌شود هرگاه $q \to 0$ در آن صورت تابع $f(t) = lnt$ روی D_0 مقعر است.

لم ۲: [۹] اگر $g: C \to \mathrm{R}$ تابع مقعر روی مجموعه محدب $C \subseteq R$ باشد، آنگاه برای هر $x, y \in C$ و $\alpha \in [0,1]$ داریم:

$$\begin{aligned}
&2\left[g\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{g(x)+g(y)}{2}\right]r \\
&\le\ g\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \\
&-\big((1-\alpha)g(x) + \alpha g(y)\big) \\
&\le\ 2[g\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{g(x)+g(y)}{2}]R
\end{aligned}$$

در حالی که

$$r = min\{\alpha, 1-\alpha\}$$

و

$$R = max\{\alpha, 1-\alpha\}.$$

لم ۳: [۸] اگر g تابع مقعر و حقیقی مقدار روی بازه I باشد، آنگاه برای x و y در درون بازه I و $\alpha \in [0,1]$ داریم:

$$\begin{aligned}
&0 \le g\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \\
&-\big((1-\alpha)g(x) + \alpha g(y)\big) \\
&\le \alpha(1-\alpha)(y-x)\big(g'_-(x) - g'_-(y)\big).
\end{aligned}$$

لم ۴: [۸] فرض کنیم g تابع حقیقی مقدار روی بازه باز I دو بار مشتق‌پذیر باشد. اگر ثابت‌های β_1 و β_2 وجود داشته باشند به‌طوری که برای هر

$t \in I$ ،$\beta_1 \le g''(t) \le \beta_2$ ،

آنگاه برای هر $x, y \in I$ و $\alpha \in [0,1]$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\beta_1(y-x)^2 \\
&\le (1-\alpha)g(x) + \alpha g(y) \\
&\qquad - g\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \\
&\le \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\beta_2(y-x)^2.
\end{aligned}$$

لم ۵: [۱۰] فرض کنیم f_1، f_2 و f_3 توابع حقیقی مقدار روی بازه بسته I باشند. اگر برای $t \in I$،

$$f_1(t) \le f_2(t) \le f_3(t),$$

آنگاه برای عملگرهای اکیداً مثبت A و B نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$P_{f_1}(A,B) \le P_{f_2}(A,B) \le P_{f_3}(A,B).$$

در سراسر این مقاله برای راحتی تعاریف زیر را به کار خواهیم برد:

$$R(u) := \max\left\{\frac{u-m}{M-m}, \frac{M-u}{M-m}\right\} = \frac{1}{2} - \left|\frac{u-\frac{M+m}{2}}{M-m}\right|,$$

$$r(u) := \min\left\{\frac{u-m}{M-m}, \frac{M-u}{M-m}\right\} = \frac{1}{2} + \left|\frac{u-\frac{M+m}{2}}{M-m}\right|,$$

$$C_q(m,M) = \frac{m^q\, lnm + M^q\, lnM}{M-m} - \left(\frac{M+m}{2}\right)^q \ln\left(\frac{M+m}{2}\right).$$

۲. نتایج اصلی

قضیه ۱: فرض کنیم A و B عملگرهای اکیداً مثبت باشند به‌طوری که برای برخی $m, M \in D_q$ با شرط $m < M$ داشته باشیم $mB \le A \le MB$. آنگاه

$$\begin{aligned}
0 \le S_q(A|B) - &\frac{m^q\, lnm}{M-m}(MB - A) \\
&- \frac{M^q\, lnM}{M-m}(A - mB) \\
\le \frac{m^q(1+lnm) - M^q(1+lnM)}{M-m}&P_h(A,B)
\end{aligned}$$

که در آن $h(t) = (t-m)(M-t)$.

اثبات: با توجه به لم ۲ تابع $t^q\, lnt$ روی D_q مقعر است. با قرار دادن $g(t) = t^q\, lnt$، $x = m$، $y = M$ و $\alpha = \frac{x-m}{M-m}$ برای $x \in [m, M]$ در لم ۳ خواهیم داشت:

$$0 \le x^q\, lnx - \frac{m^q\, lnm}{M-m}(M-x) - \frac{M^q\, lnM}{M-m}(x-m) \le$$

$$\frac{m^q(1+lnm)-M^q(1+lnM)}{M-m}h(x). \quad (۱)$$

بنا به لم ۵ و با محاسبه چشم انداز دو طرف نامساوی‌ها در (۱) نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱: فرض کنیم A و B عملگرهای اکیداً مثبت باشند به‌طوری که برای برخی $m, M \in D_q$ با شرط $m < M$ داشته باشیم $mB \le A \le MB$. آنگاه

$$0 \le S_q(A|B) - \frac{m^q lnm}{M-m}(MB-A) - \frac{M^q lnM}{M-m}(A-mB) \le \frac{1}{4}(M-m)\big(m^q(1+lnm) - M^q(1+lnM)\big)B.$$

اثبات: تابع $h(t)$ تعریف شده در قضیه ۱، مقدار ماکزیمم خود را در $t=\frac{M+m}{2}$ می‌گیرد و این مقدار ماکزیمم برابر است با

$\frac{1}{4}(M-m)^2.$

با جاگذاری این مقدار ماکزیمم در نامساوی (۱) خواهیم داشت:

$$0 \le x^q lnx - \frac{m^q lnm}{M-m}(M-x) - \frac{M^q lnM}{M-m}(x-m) \le \frac{1}{4}(M-m)\big(m^q(1+lnm) - M^q(1+lnM)\big). \quad (۲)$$

حال با استفاده از لم ۵ و با محاسبه چشم انداز دو طرف نامساوی‌ها در (۲) نامساوی‌های مطلوب حاصل می‌شود.

قضیه ۲: فرض کنیم A و B عملگرهای اکیداً مثبت باشند به‌طوری که برای برخی $m, M \in D_q$ با شرط $m < M$ داشته باشیم $mB \le A \le MB$. آنگاه

$$2C_q(m,M)P_r(A,B) \le S_q(A,B) - \frac{m^q lnm}{M-m}(MB-A) - \frac{M^q lnM}{M-m}(A-mB) \le 2C_q(m,M)P_R(A,B).$$

اثبات: بااستفاده از لم ۳ و با قرار دادن $g(t)=t^q lnt$ برای $t \in D_q$ داریم:

$$2\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^q ln\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{x^q lnx + y^q lny}{2}\right]r \le \big((1-\alpha)x+\alpha y\big)^q \ln((1-\alpha)x+\alpha y) - ((1-\alpha)x^q lnx + \alpha y^q lny) \le ۲\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^q ln\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{x^q lnx + y^q lny}{2}\right]R \quad (۳)$$

که در آن $x, y \in D_q$ و $\alpha \in [0,1]$ در حالی که $r = min\{\alpha, 1-\alpha\}$

و

$R = max\{\alpha, 1-\alpha\}.$

حال با جای‌گذاری $x=m$، $y=M$ و $\alpha=\frac{x-m}{M-m}$ برای $x \in [m,M]$ در نامساوی (۳) خواهیم داشت:

$$2C_q(m,M)r(x) \le x^q lnx - \frac{m^q lnm}{M-m}(M-x) - \frac{M^q lnM}{M-m}(x-m) \le ۲C_q(m,M)R(x). \quad (۴)$$

بنا به لم ۵ و با محاسبه چشم انداز دو طرف نامساوی‌ها در (۴) نتیجه به دست می‌آید.

قضیه۳: فرض‌کنیم A و B عملگرهای اکیداً مثبت باشند به‌طوری که برای برخی $m, M \in D_q$ با شرط $m < M$ داشته باشیم $mB \le A \le MB$. آنگاه

$$\frac{1}{2}m^{q-2}(2q-1+q(q-1)lnm)P_h(A,B) \le \frac{m^q lnm}{M-m}(MB-A) + \frac{M^q lnM}{M-m}(A-mB) - S_q(A,B) \le \frac{1}{2}M^{q-2}(2q-1+q(q-1)lnM)P_h(A,B)$$

که در آن $h(t)=(t-m)(M-t)$.

اثبات: با استفاده از لم ۴ و با قرار دادن $g(t)=t^q lnt$ برای $t \in D_q$ داریم:

$$\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\beta_1(y-x)^2$$

$$\leq (1-\alpha)x^q lnx + \alpha y^q lny$$
$$-\big((1-\alpha)x+\alpha y\big)^q ln\big((1-\alpha)x+\alpha y\big)$$
$$\leq \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\beta_2(y-x)^2 \qquad (۵)$$

که در آن $x, y \in D_q$، $\alpha \in [0,1]$ و

$$\beta_1 = m^{q-2}(2q-1+q(q-1)lnm),$$
$$\beta_2 = M^{q-2}(2q-1+q(q-1)lnM).$$

حال با جای‌گذاری این مقادیر و $x = m$، $y = M$ و $\alpha = \frac{x-m}{M-m}$ برای $x \in [m, M]$ درنامساوی (۵) داریم:

$$\frac{1}{2}m^{q-2}(2q-1+q(q-1)lnm)h(x)$$
$$\leq \frac{m^q lnm}{M-m}(M-x) + \frac{M^q lnM}{M-m}(x-m)$$
$$- x^q lnx$$
$$\leq \frac{1}{2}M^{q-2}\begin{pmatrix} 2q-1 \\ +q(q-1)lnM\end{pmatrix}h(x). \qquad (۶)$$

با مراجعه به لم ۵ و با محاسبه چشم‌انداز دو طرف نامساوی‌ها در (۶) نامساوی‌های مطلوب حاصل می‌شود.
در قضیه ۱، هرگاه $q \to 0$ کران‌های آنتروپی عملگری نسبی به صورت زیر به دست می‌آید:

نتیجه۲: فرض کنیم A و B عملگرهای اکیداً مثبت باشند به‌طوری که برای برخی$0 < m < M$داشته باشیم

$$mB \leq A \leq MB.$$

آن گاه

$$0 \leq S(A|B) - \frac{lnm}{M-m}(MB-A) -$$
$$\frac{lnM}{M-m}(A-mB) \leq \frac{lnm - lnM}{M-m}P_h(A,B)$$

که در آن $h(t) = (t-m)(M-t)$.

در نتیجه ۱، هرگاه $q \to 0$ نتیجه زیر حاصل می‌شود که کران‌های جدیدی برای آنتروپی عملگری ارائه می‌شود:

نتیجه ۳: فرض کنیم A و B عملگرهای اکیداً مثبت باشند به‌طوری که برای برخی $0 < m < M$ داشته باشیم

$$mB \leq A \leq MB.$$

آنگاه

$$0 \leq S(A|B) - \frac{lnm}{M-m}(MB-A) -$$
$$\frac{lnM}{M-m}(A-mB)$$
$$\leq \frac{1}{4}(M-m)(lnm - lnM)B.$$

در قضیه ۲، هرگاه $q \to 0$ نتیجه زیر به دست می‌آید که در واقع همان نتیجه دراگومیر است که در قضیه ۲ مرجع [۸] با روشی متفاوت ثابت شده است.

نتیجه ۴: فرض کنیم A و B عملگرهای اکیداً مثبت باشند به‌طوری که برای برخی $0 < m < M$ داشته باشیم

$$mB \leq A \leq MB.$$

آنگاه

$$2C_0(m,M)P_r(A,B)$$
$$\leq S(A,B) - \frac{lnm}{M-m}(MB-A)$$
$$-\frac{lnM}{M-m}(A-mB) \leq 2C_0(m,M)P_R(A,B)$$

در قضیه ۳، هرگاه $q \to 0$ نتیجه زیر حاصل می‌شود که در واقع منطبق بر قضیه ۴ در [۷] است و دراگومیر آن را با روشی دیگر ثابت کرده است.

نتیجه ۵: فرض کنیم A و B عملگرهای اکیداً مثبت باشند به‌طوری که برای برخی $0 < m < M$ داشته باشیم

$$mB \leq A \leq MB.$$

آنگاه

$$\frac{1}{2M^2}P_h(A,B)$$
$$\leq S(A|B) - \frac{lnm}{M-m}(MB-A)$$
$$-\frac{lnM}{M-m}(A-mB) \leq \frac{1}{2m^2}P_h(A,B)$$

فهرست منابع

1. Bhatia, R., Matrix Analysis. 1997, New York: Springer-Verlag.

2. Effros, E.G., A matrix convexity approach to some celebrated quantum inequalities. Proc. Natl. Acad. Sci, 2009. ***106*** *p. 1006-1008.*

3. Ebadian, A., I. Nikoufar, and M.E. Gordji, Perspectives of matrix convex functions. Proc. Natl. Acad. Sci, 2011. ***108****(18): p. 7313-7314.*

4. Fujii, J.I. and E. Kamei, Uhlmann's interpolational method for operator means. Math. Japon, 1989. ***34****(4): p. 541-547.*

5. Fujii, J.I. and E. Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory. Math. Japon, 1989. ***34****(3): p. 341-348.*

6. Furuta, T., Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators. Linear Algebra Appl., 2004. **۳۸۱***: p. 219-235.*

7. Dragomir, S.S., Some inequalities for relative operator entropy. Preprint RGMIA Res. Rep. Col l., 2015. ***18****(145): p. 1-12.*

8. Dragomir, S.S., Further inequalities for relative operator entropy. RGMIA Res. Rep. Col l, 2015. ***18****(160): p. 1-11.*

9. Dragomir, S.S., Bounds for the normalized Jensen functional. Bull. Austral. Math. Soc, 2006. ***74****: p. 471-478.*

10. Nikoufar, I., On operator inequalities of some relative operator entropies. Adv. Math., 2014. ***259****: p. 376-383.*