

## برآورد نیمه پارامتری کالاهای استراتژیک (قیمت نفت اوپک)

رحمان فرنوش<sup>۱\*</sup>، مهتاب حاجبی<sup>۲</sup>

<sup>(۱)</sup> دانشیار دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده‌ی ریاضی، تهران، ایران

<sup>(۲)</sup> دانشجوی دکتری دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده‌ی ریاضی، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۸/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۱۱/۲۸

### چکیده

در اقتصاد جهانی، نفت خام از جمله مهم‌ترین کالاهای استراتژیکی محسوب می‌شود که تاثیر به سزایی بر عملکرد بازارهای منطقه‌ای و بین‌المللی دارد. پیش‌بینی قیمت نفت در جهان همواره بحث مهم و چالش برانگیزی در اقتصاد جهانی بوده است و تولیدکنندگان و مصرف‌کنندگان آن همواره در تلاش بوده‌اند نقش خود را در تغییر قیمت نفت افزایش دهند و اوپک نیز سال‌هاست که یکی از بازیگران این عرصه‌ی اقتصادی شده است. نفت به‌عنوان یکی از مهمترین منابع تأمین مالی بودجه‌ی کشورهای عضو اوپک محسوب می‌شود. نوسانات قیمت نفت، یکی از عوامل اصلی بسیاری از بحران‌های اقتصادی در میان این کشورها می‌باشد. با استفاده از مدل‌های آماری می‌توان عملکرد پیش‌بینی قیمت نفت را به صورت چشم‌گیری بهبود بخشید و نتایجی با خطای کم‌تر و دقت بیش‌تر به‌دست آورد. از این‌رو، در این مقاله از مدل اتورگرسیو خطی جزئی با روش برآورد نیمه پارامتری، برای پیش‌بینی قیمت نفت استفاده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** روش نیمه پارامتری، مدل اتورگرسیو خطی جزئی، برآورد حداکثر درست‌نمایی، قیمت نفت اوپک.

**۱. مقدمه**

در دهه ۸۰ میلادی، قیمت‌گذاری نفت خام که از جمله مهم‌ترین متغیرهای کلیدی است، توسط اوپک (سازمان کشورهای صادرکننده نفت) انجام می‌گرفت. در این سال‌ها، اکثر کشورهای عضو اوپک که تولیدکنندگان عمده نفت خام جهان بودند، بر بالا رفتن قیمت نفت اصرار داشتند، در حالی که بالا رفتن قیمت نفت به ضرر اکثریت کشورهای غربی بود و با توجه به عدم امکان جایگزینی نفت به‌عنوان یک کالای استراتژیک و وابسته بودن اقتصاد این کشورها به نفت، استراتژی عملکرد بازارهای مالی بین‌المللی این کشورها همواره توسط قیمت نفت تهدید می‌شد. بی‌ثباتی قیمت‌های نفت عکس‌العمل منفی بر اقتصاد کلان کشورهای واردکننده نفت دارد و یک شوک افزایش قیمت نفت به‌عنوان یک شوک منفی عرضه، منحنی عرضه‌ی کل اقتصاد را به سمت عقب و چپ شیفت می‌دهد. بنابراین، هم افزایش در سطح قیمت‌ها و هم یک کاهش در محصول و اشتغال را به‌وجود می‌آورد [۲].

در پی شوک نفتی در دهه‌ی ۱۹۷۰، مطالعات بسیاری در زمینه‌ی ارتباط قیمت نفت و فعالیت‌های اقتصادی صورت گرفته است. نخستین مطالعه در این زمینه توسط [۸] انجام شده است. وی اظهار داشت که شوک قیمت نفت یکی از عوامل رکود اقتصادی در کشورها بوده است، به طوری که افزایش قیمت نفت باعث کاهش تولید ناخالص ملی در کشور می‌شود. این مطالعه مبنای بسیاری از مطالعات در رابطه با تاثیر شوک نفتی بر متغیرهای کلان اقتصادی قرار گرفت [۱۴]. شوک‌های نفتی ناشی از تغییرات قیمت نفت می‌تواند اثرات متفاوتی بر اقتصاد کشورهای عضو اوپک داشته باشند و علت آن را می‌توان در تفاوت زیرساخت‌های بخش‌های اقتصادی، سیاسی هر جامعه و یا در درجه‌ی وابستگی بودجه‌ی آن کشور به درآمدهای ارزی حاصل از فروش نفت و یا در سیستم پرداخت مالیاتی آن کشورها جستجو نمود [۱].

به‌دلیل این که نفت یک عامل تولید در بیشتر بخش‌ها و صنایع است، افزایش در قیمت‌های نفت، هزینه‌ی تولید شرکت‌ها را افزایش داده و در نتیجه باعث کاهش در محصول کشورهای واردکننده نفت می‌شود [۱۰]. با

افزایش قیمت نفت، یک انتقال درآمد از کشورهای واردکننده نفت به کشورهای صادرکننده صورت می‌گیرد. بنابراین، مصرف در کشورهای واردکننده نفت کاهش می‌یابد. از طرفی، هرگونه کاهش در قیمت نفت تبعاتی منفی بر اقتصاد کشورهای صادرکننده نفت از جمله کشور ما به‌عنوان دومین تولیدکننده اوپک دارد. همچنین، علاوه بر تأثیراتی که تغییر در قیمت نفت خام از طریق عرضه و تقاضا به همراه دارد، به واسطه‌ی تورم و نرخ ارز نیز بر اقتصاد تأثیر می‌گذارد. تجزیه و تحلیل ارتباط میان تغییر در قیمت انرژی و اقتصاد تا حدی پیچیده است. انرژی به ویژه نفت، نیروی محرکه‌ی هر فعالیت اقتصادی و تولیدی است، بنابراین جایگاه ویژه‌ی در رشد و توسعه‌ی اقتصادی دارد [۳]. از این رو، پیش‌بینی قیمت نفت نه تنها نقش مهمی در سیاست دولت‌ها ایفا می‌کند، بلکه بر بهینه‌سازی میزان تولید و بهبود اقتصاد در کشور نیز بسیار موثر است. کشورهای عضو اوپک اغلب جزء کشورهای در حال توسعه می‌باشند. بنابراین، شاخص‌های اقتصادی استفاده شده در مدل‌های پیش‌بینی در این کشورها حتی در شرایط بلندمدت نیز به علت ساختار اقتصادی ناپایدار این کشورها با نوسانات زیادی همراه است و این بی‌ثباتی اقتصادی از دقت پیش‌بینی قیمت نفت توسط این مدل‌ها می‌کاهد و همین امر در بلندمدت منجر به بروز بی‌ثباتی در سیاست‌گذاری‌های اقتصادی این کشورها می‌گردد. لذا، پیش‌بینی قیمت نفت در کوتاه‌مدت در صورت صحیح بودن، می‌تواند تأثیرات نامطلوب وقوع رویدادهای سیاسی و اقتصادی را در سطح بین‌الملل بکاهد [۱].

با استفاده از مدل‌های آماری می‌توان عملکرد پیش‌بینی قیمت نفت را به صورت چشم‌گیری بهبود بخشید و نتایجی با خطای کم‌تر و دقت بیشتر به‌دست آورد. از این رو، در این مقاله از مدل اتورگرسیو خطی جزئی با استفاده از روش براورد نیمه‌پارامتری، برای پیش‌بینی قیمت نفت اوپک استفاده شده است. روش‌های نیمه پارامتری برای براورد توابع مجهول در مدل‌های اتورگرسیو با خطای مستقل و یا خطای وابسته می‌باشند که موجب افزایش دقت در پیش‌بینی داده‌های زمانی غیرخطی می‌شود. همچنین، روش نیمه‌پارامتری

بخش، کاربردی تجربی به منظور نشان دادن کفایت متدولوژی این پژوهش، برای پیش‌بینی قیمت نفت اوپک از سال ۲۰۱۰ تا سال ۲۰۱۶ مورد بررسی قرار گرفته شده است. در نهایت، بخش چهارم به خلاصه و نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

## ۲. برآورد نیمه پارامتری در مدل اتورگرسیو غیرخطی با خطای مستقل

در این قسمت، برآوردگر نیمه پارامتری که ترکیبی از روش پارامتری (روش حداکثر درست‌نمایی برای برآورد پارامترهای تابع رگرسیون مدل سری زمانی) و روش ناپارامتری (روش برآورد هسته هموار) می‌باشد، مطرح می‌گردد.

در ابتدا، مدل اتورگرسیو جزئی خطی مرتبه‌ی اول با خطای مستقل به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + f(y_{t-2}) + \varepsilon_t, \quad (1-1)$$

$$t = 2, 3, \dots, n, |\alpha| < 1,$$

به طوریکه، تابع رگرسیون  $f(0)$  یک تابع اتورگرسیو غیرخطی نامعلوم و خطاهای  $\varepsilon_t$  متغیرهای تصادفی از هم مستقل، هم توزیع و دارای میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  می‌باشند. همچنین  $\varepsilon_t$  و  $y_{t-1}$ ،  $y_{t-2}$  برای هر  $t$  مستقل می‌باشند. همچنین  $\alpha$  پارامتر نامعلوم می‌باشد.

به طور سنتی، رویکردی پارامتری و ناپارامتری برای برآورد تابع اتورگرسیو  $f(0)$  می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. بدین منظور که اگر اطلاعاتی از تجربیات قبلی وجود داشته باشد و تحلیل تحت ساختار قبلی شکل گیرد، می‌توان فرض کرد که تابع رگرسیونی مربوط به مدل اتورگرسیو غیرخطی یک چارچوب پارامتری به صورت مدل پارامتری زیر دارد:

$$f(x) \in \{g(x, \gamma), \gamma \in \Gamma\}$$

در صورتی که  $\Gamma \in \mathbb{R}^p$  فضای پارامتری است.

در این پژوهش،  $g(x, \gamma)$  را بسط تیلور تابع نامعلوم  $f(x)$  حول نقطه‌ی  $c_0$  به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$g(y_{t-1}, \gamma) = f(c_0) + f'(c_0)(y_{t-1} - c_0) + \frac{1}{2} f''(c_0)(y_{t-1} - c_0)^2, \quad (1-2)$$

که در آن  $\gamma$  برداری از پارامترهای نامعلوم با بعد  $(3 \times 1)$

پیشنهادی در این پژوهش، که از ترکیب برآورد پارامترها و تابع تعدیل‌کننده‌ی ناپارامتری به وجود می‌آید، برآوردگر کاراتری را ارائه خواهد نمود. [۱۱] یک رویکرد نیمه پارامتری برای پیش‌بینی کوتاه مدت قیمت نفت پیشنهاد کرد و نشان داد که چگونه می‌توان از خاصیت ناهمگنی مشروط خودرگرسیو تعمیم‌یافته از تغییرات قیمت نفت، برای پیش‌بینی توزیع قیمت نفت در افق‌های کوتاه مدت بهره گرفت. [۷] نیز با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی به پیش‌بینی قیمت نفت پرداخته‌اند. با توجه به وجود پدیده‌ی غیرخطی بودن فرآیند حاکم بر سری زمانی قیمت، می‌توان انتظار داشت که مدل‌های غیرخطی و یا خطی جزئی (نظیر مدل‌های اتورگرسیو) به پیش‌بینی بهتری منجر شود. الگوی امروزه‌ی بازارهای مالی جهانی اغلب الگوها و مدل‌های غیرخطی هستند و اقتصاددانان به‌طور چشمگیری از این روش‌ها استفاده می‌کنند [۴].

[۵]، مدل‌های سری زمانی اتورگرسیو با خطای وابسته را مورد بررسی قرار داده‌اند. [۱۲] یک روش نیمه پارامتری برای مدل سری زمانی اتورگرسیو غیرخطی را ارائه داده‌اند. همچنین، مدل‌های سری زمانی اتورگرسیو با خطای مستقل از مقادیر اولیه‌ی مشاهدات زمانی، در سال ۲۰۱۴ در مقاله‌ی [۶] مورد مطالعه قرار گرفته است.

هدف از این تحقیق نیز پیش‌بینی قیمت نفت اوپک به عنوان یک کالای استراتژیک با استفاده از روش برآورد نیمه پارامتری در مدل‌های اتورگرسیو خطی جزئی با خطای مستقل می‌باشد. در راستای هدف مزبور بر مبنای داده‌های ماهیانه (دوره زمانی ۲۰۱۶-۲۰۱۰) پارامترهای یک مدل سری زمانی خطی جزئی با خطاهای مستقل برآورد شده‌اند.

ساختار مقاله‌ی حاضر بدین صورت شکل می‌گیرد: در بخش دوم، به برآورد پارامترها با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی پرداخته و سپس با استفاده از کرنل ناپارامتری، تابع رگرسیونی غیرخطی مدل برآورد می‌شود. همچنین، در این بخش از تعدیل‌کننده‌ی ناپارامتری برای بهبود مدل استفاده و سپس با استفاده از روش برازش درجه‌ی دوم، تعدیل‌کننده‌ی ناپارامتری برآورد می‌شود. بخش سوم، مطالعه‌ی شبیه‌سازی عملکرد برآورد نیمه پارامتری مورد بررسی قرار می‌گیرد و سپس در این

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \Sigma | x, Y)}{\partial \theta} = \Sigma^{-1} X^T Y - \Sigma^{-1} X' X \theta,$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \Sigma | x, Y)}{\partial \Sigma} = -\frac{1}{2} [n\Sigma - (Y - X\theta)^T (Y - X\theta)].$$

به صورت زیر می‌باشد:

$$\gamma = \left( f(c_0), f'(c_0), \frac{1}{2} f''(c_0) \right). \quad (1-3)$$

فرض کنید مشاهدات  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  از مدل (۱-۱) تولید می‌شوند. به منظور سادگی و قرار دادن تمام مشاهدات در یک مدل فشرده، ابتدا متغیرهای تصادفی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$Y_{(n-1) \times 1} = (Y_2, Y_3, \dots, Y_n)^T, \quad (1-4)$$

$$\theta = (\gamma, \alpha)^T = \left( f(c_0), f'(c_0), \frac{1}{2} f''(c_0), \alpha \right)^T, \quad (1-5)$$

$$X_{t-1} = (1, (y_{t-2} - c_0), (y_{t-2} - c_0)^2, y_{t-1})^T, \quad (1-6)$$

$$X_{(n-1) \times 4} = (X_1, \dots, X_{n-1})^T, \quad (1-7)$$

$$E_{(n-1) \times 1} = (\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T \quad (1-8)$$

با استفاده از متغیرهای تعریف شده، تابع اتورگرسیو خطی جزئی در رابطه‌ی (۱-۱) را می‌توان به صورت مدل خطی زیر در نظر گرفت:

$$Y = X\theta + E. \quad (1-9)$$

بردار پارامتر  $\theta$  در مدل (۱-۹)، با استفاده از روش حداکثر درستنمایی به صورت زیر برآورد می‌شود:

فرض کنید  $E$  در مدل (۱-۹) دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\Sigma$  می‌باشد. بنابراین،  $Y$  در رابطه‌ی (۱-۹) دارای توزیع نرمال با میانگین  $X\theta$  و واریانس  $\Sigma$  می‌باشد. به عبارت دیگر،  $Y \sim N(X\theta, \Sigma)$ .

بنابراین، تابع لگ-درست نمایی مدل (۱-۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\ln L(\theta, \Sigma | X, Y) = -\frac{n}{2} \ln(2\Pi) - \frac{n}{2} \ln|\Sigma| - \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} (Y - X\theta)^T (Y - X\theta)] = -\frac{n}{2} \ln(2\Pi) - \frac{n}{2} \ln|\Sigma| - \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} Y^T Y] + \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} Y^T X\theta] + \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} \theta^T X' Y] - \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} \theta^T X' X \theta] \quad (1-10)$$

مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول تابع لگ-درستنمایی نسبت به پارامترهای مدل یعنی  $\theta, \Sigma$ ، به ترتیب عبارتند از:

با مساوی صفر قرار دادن مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول تابع لگ-درستنمایی نسبت به پارامترهای مدل یعنی  $\theta, \Sigma$ ، برآوردهای حداکثر درستنمایی به ترتیب، به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\hat{\theta} = (X'X)^{-1} X'Y, \quad (1-11)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} (Y - X\hat{\theta})^T (Y - X\hat{\theta}).$$

[۵]، پیشنهاد یک فرم نیمه پارامتری به صورت  $f(x) = g(x, \gamma)\xi(x)$  برای تابع اتورگرسیو نامعلوم  $f(x)$  داده‌اند که به منظور بهبود برآورد از عامل تعدیل کننده‌ی  $\xi(x)$  در آن استفاده شده است. بنابراین، یک روش ترکیبی پارامتری و تعدیل کننده‌ی ناپارامتری برای برآورد تابع رگرسیون مدل (۱-۱) پیشنهاد داده شده که به برآورد نیمه پارامتری معروف است.

بنابراین، در این قسمت به برآورد عامل تعدیل کننده‌ی  $f(x) = g(x, \hat{\gamma})\xi(x)$  در رابطه‌ی می‌پردازیم.

با استفاده از ایده‌ی مشابه [۵]، [۹] و [۱۳] معیار برازش چند جمله‌ای درجه‌ی دوم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q(x, \xi) = \frac{1}{h_n} \sum_{j=1}^n k\left(\frac{y_{j-1} - x}{h_n}\right) \{f(y_{j-1}) - g(y_{j-1}, \hat{\gamma}_n)\xi\}^2,$$

چنانچه  $k(0)$  یک تابع کرنل و  $h_n$  پهنای باند می‌باشد که بستگی به تعداد حجم نمونه ( $n$ ) دارد. برآوردگر  $\hat{\xi}(x)$  از  $\xi(x)$  به وسیله‌ی حداقل کردن معیار برازش درجه‌ی دوم فوق نسبت به  $\xi(x)$  به دست می‌آید. بنابراین یک برآوردگر ناپارامتری  $\hat{\xi}(x)$  به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\hat{\xi}(x) = \frac{\sum_{j=1}^n [k\left(\frac{y_{j-1} - x}{h_n}\right) g(y_{j-1}, \hat{\gamma}_n) f(y_{j-1})]}{\sum_{j=1}^n [k\left(\frac{y_{j-1} - x}{h_n}\right) g^2(y_{j-1}, \hat{\gamma}_n)]}.$$

### ۳. مطالعات شبیه‌سازی و کاربرد تجربی

کارایی برآورد نیمه پارامتری در مدل‌های اتورگرسیو خطی جزئی با خطای مستقل، با دو دیدگاه در این پژوهش مورد توجه واقع شده است. در ابتدا، با استفاده از شبیه‌سازی توابع غیرخطی معلوم، به بررسی خطای برآورد نیمه پارامتری توابع غیرخطی مدل‌های اتورگرسیو خطی جزئی پرداخته شده است. سپس، در مطالعات کاربردی، با استفاده از داده‌های واقعی که شامل داده‌های تعیین قیمت نفت اوپک بوده است، به کار گرفته شده است.

#### ۳-۱. مطالعات شبیه‌سازی

در این قسمت، عملکرد برآورد نیمه پارامتری برای مدل‌های اتورگرسیو خطی جزئی با خطاهای مستقل، با استفاده از محیط نرم‌افزار متلب، مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، با استفاده از مدل اتورگرسیو خطی جزئی زیر به تعداد ۴۰۰ مشاهده به صورت

$$y_0, y_1, \dots, y_{399} \text{ تولید می‌شود:}$$

$$y_t = 0.43y_{t-1} + f(y_{t-2}) + \varepsilon_t$$

به‌طوریکه خطاهای  $\varepsilon_t$  مستقل و هم توزیع و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $(0.125)^2$  می‌باشند.

در این مطالعه، شبیه‌سازی عملکرد برآورد نیمه پارامتری برای مدل‌های اتورگرسیو خطی جزئی با در نظر گرفتن دو تابع زیر، برای اندازه نمونه‌ی  $n=400,600,800$  مورد ارزیابی قرار می‌گیرند:

$$f_1(x) = 5e^{-x},$$

$$f_2(x) = e^{-3x^2} + \cos(2x).$$

به‌منظور ارزیابی کارایی مدل اتورگرسیو خطی جزئی با خطای مستقل، میانگین مربعات خطا (MSE) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{\tilde{f}(x_i) - f(x_i)\}^2.$$

ریشه‌ی MSE، به‌صورت RMSE نامگذاری می‌شود.

آنگاه برآوردگر  $f(x)$  به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{f}(x) = g(x, \hat{\gamma}) \hat{\xi}(x). \quad (1-12)$$

فرمول  $\hat{\xi}(x)$  شامل تابع نامعلوم  $f(0)$  می‌باشد. بنابراین در شبیه‌سازی کاربرد عملی ندارد. لذا، با استفاده از رابطه‌ی

$$\varepsilon_t = y_t - \alpha y_{t-1} - f(y_{t-2}),$$

و با توجه به این مطلب که خطاهای مدل مقادیر کوچکی هستند [۵] و [۶]، می‌توان رابطه‌ی زیر را در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^n [k \left( \frac{y_{j-2} - x}{h_n} \right) g(y_{j-2}, \hat{\gamma}_n) f(y_{j-2})] \\ & \approx \sum_{j=2}^n [k \left( \frac{y_{j-2} - x}{h_n} \right) g(y_{j-2}, \hat{\gamma}_n) (y_j - \hat{\alpha} y_{j-1})], \end{aligned}$$

و در نتیجه رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{\xi}(x) = \frac{\sum_{j=2}^n [k \left( \frac{y_{j-2} - x}{h_n} \right) g(y_{j-2}, \hat{\gamma}_n) (y_j - \hat{\alpha} y_{j-1})]}{\sum_{j=2}^n [k \left( \frac{y_{j-2} - x}{h_n} \right) g^2(y_{j-2}, \hat{\gamma}_n)]},$$

و در نهایت، برآوردگر نیمه پارامتری تابع رگرسیون به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{f}(x) = g(x, \hat{\gamma}) \hat{\xi}(x), \quad (1-13)$$

در رابطه‌ی فوق، هیچ مقدار نامعلوم در برآورد تابع  $f(x)$  که به‌صورت  $\tilde{f}(x)$  معرفی شده است وجود ندارد. بنابراین، برای برآورد تابع اتورگرسیون خطی جزئی که می‌توان آن را با استفاده از اطلاعات نمونه‌ای و شبیه‌سازی داده‌ها به‌دست آورد، روی  $\tilde{f}(x)$  متمرکز می‌شویم.

[۶]، خواص سازگاری برآوردگر نیمه پارامتری را با استفاده از قضایا اثبات کرده‌اند. آن‌ها در مقاله‌ی خود نشان داده‌اند که اگر  $\hat{f}(x)$  برآوردگر نیمه پارامتری تعریف شده در رابطه‌ی (۱-۱۲) و  $\tilde{f}(x)$  نیز برآوردگر نیمه پارامتری تعریف شده در رابطه‌ی (۱-۱۳) باشد، آنگاه وقتی  $n$  به سمت بی‌نهایت میل کند، روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) & \xrightarrow{P} f(x), \\ \tilde{f}(x) - \hat{f}(x) & \xrightarrow{P} 0. \end{aligned}$$

جدول‌ها، آزمون کولموگروف-اسمیرنوف برای آزمون نرمالیتی خطاهای مدل اتورگرسیو محاسبه شده است. آماره‌ی آزمون سطح معنی داری یا به عبارتی دیگر، نرمالیتی خطاهای مدل را تایید می‌کند. همچنین، RMSE و MSE دو مدل فوق در جدول‌های ۱-۳ و ۱-۴ آورده شده است. شبیه‌سازی داده‌ها با ۵۰۰ تکرار انجام شده است.

در این‌جا، تابع کرنل به صورت تابع گوسی و پهنای باند ( $h_n$ ) نیز به نسبت  $\lambda n^{-0.2}$  (رجوع شود به [۶]) در نظر گرفته می‌شوند. لذا مقدار  $\hat{f}(x_i)$  در  $x_i$  با توجه به انتخاب  $h_n$  محاسبه می‌شود.

جدول‌های ۱-۱ و ۱-۲، نشان دهنده‌ی شاخص‌های توصیفی برای داده‌های شبیه‌سازی شده و خطاها در مدل‌های ذکر شده‌ی فوق می‌باشند. همچنین، در این

جدول ۱-۱. شاخص‌های توصیفی شبیه‌سازی خطای تابع  $f(x) = 7x^2e^{-x^2}$ ,  $\lambda = 0.4$

var	n	Min	Max	Mean	std	K-Smirnov
data	400	0.0161	3.9285	1.8576	0.9791	0.9823
data	600	-0.0675	3.9595	1.8434	0.9382	0.9878
data	800	-0.0782	4.0594	1.8219	0.9431	0.9789
error	400	-0.3673	0.4417	-0.0084	0.1336	0.0704
error	600	-0.3347	0.4776	0.0005	0.1254	0.0275
error	800	-0.3586	0.4776	0.0028	0.1284	0.0214

جدول ۱-۲. شاخص‌های توصیفی شبیه‌سازی خطای تابع  $f(x) = 5e^{-4x} + 0.1\cos(3x)$ ,  $\lambda = 0.4$

var	N	Min	Max	Mean	std	K-Smirnov
data	400	-0.1766	10.9998	1.2342	1.2570	0.8666
data	600	-0.1283	8.7010	1.1645	1.1293	0.8830
data	800	-0.1723	10.7472	1.1734	1.1395	0.8643
error	400	-0.2976	0.3682	-0.0038	0.1250	0.0486
error	600	-0.3673	0.4417	-0.0075	0.1312	0.0659
error	800	-0.3673	0.4417	-0.0045	0.1301	0.0427

جدول ۱-۳. MSE(RMSE) برآورد تابع  $f(x) = 7x^2e^{-x^2}$ ,  $\lambda = 0.4$

n	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	MSE (std)	RMSE
400	(1.35, -0.76, -0.11)	0.32	0.1226 (0.0606)	0.3501
600	(1.35, -0.79, -0.07)	0.3	0.1499 (0.0537)	0.3872
800	(1.35, -0.81, -0.05)	0.29	0.1729 (0.0495)	0.4159

جدول ۱-۴. MSE(RMSE) برآورد تابع  $f(x) = 5e^{-4x} + 0.1\cos(3x)$ ,  $\lambda = 0.4$

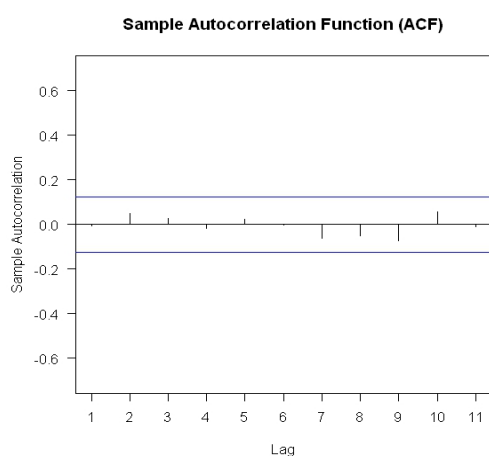
n	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	MSE (std)	RMSE
400	(0.42, -0.90, 0.14)	0.47	0.1266 (0.0605)	0.3559
600	(0.44, -0.88, 0.14)	0.46	0.1069 (0.0513)	0.3270
800	(0.45, -0.87, 0.13)	0.46	0.0993 (0.0505)	0.3151

و برآورد نیمه پارامتری آن با خطای مستقل در نمودارهای (۱-۴) و (۱-۵) آمده است. خط آبی تابع رگرسیون  $f(x)$  و خط قرمز تابع برآورد نیمه پارامتری آن را نشان می‌دهد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی از دقت و کارایی بیشتری برخوردار است.

شکل‌های (۱-۶) - (۱-۱)، نمودار تابع خودهمبستگی (ACF) خطاهای دو مدل فوق الذکر را تحت  $\lambda$ های مختلف نشان می‌دهند. با توجه به شکل‌ها، خطاهای هر دو مدل در تاخیرهای مختلف از یک تا ۱۵، دارای ناهمبستگی هستند و این مطلب یکی از گام‌های مهم کفایت مدل را تایید می‌کند. همچنین، منحنی تابع  $f(x)$

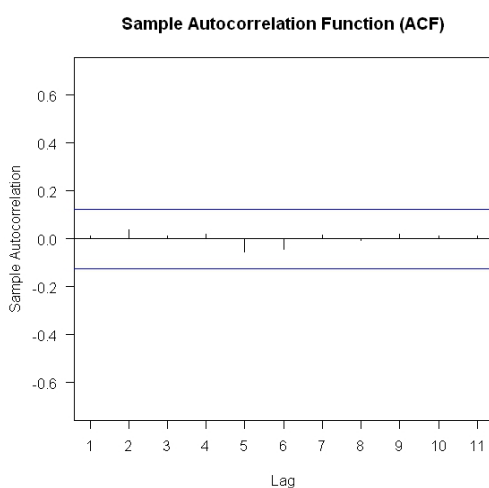
نمودار ۱-۱. ACF خطاهای مدل اتورگرسیو مربوط به برآورد نیمه پارامتری تابع غیرخطی

$$\lambda=0.13, n=60 \text{ و } f(x) = 5e^{-4x} + 0.1\cos(3x)$$



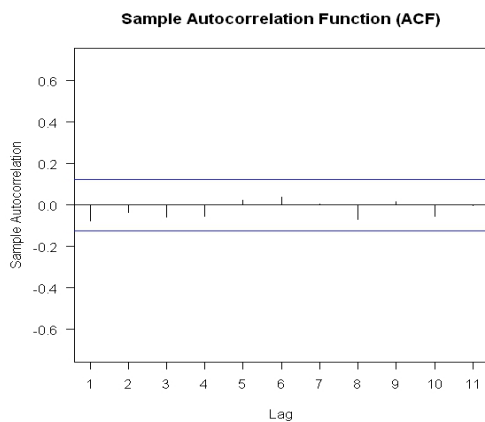
نمودار ۱-۲. ACF خطاهای مدل اتورگرسیو مربوط به برآورد نیمه پارامتری تابع غیرخطی

$$\lambda=0.26, n=600 \text{ و } f(x) = 5e^{-4x} + 0.1\cos(3x)$$



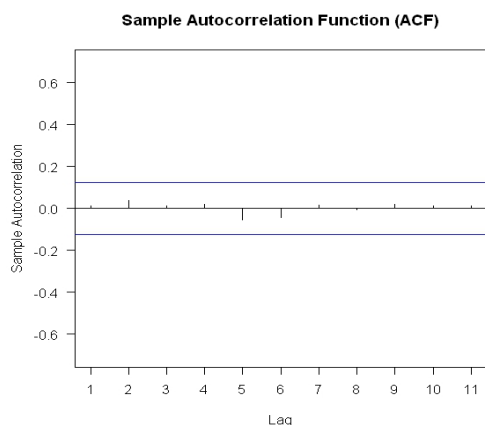
نمودار ۳-۱. ACF خطاهای مدل اتورگرسیو مربوط به برآورد نیمه پارامتری تابع غیرخطی

$$\lambda = 0.4, n=600 \text{ و } f(x) = 5e^{-4x} + 0.1\cos(3x)$$



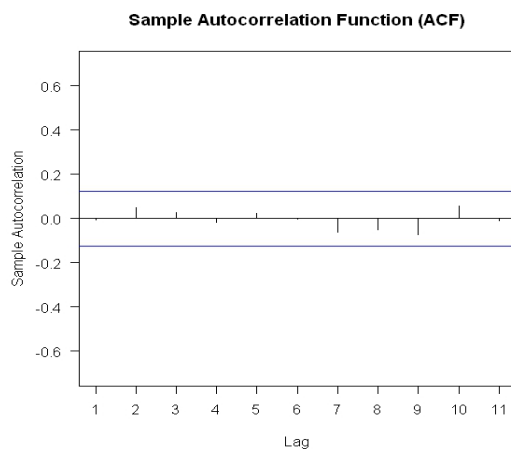
نمودار ۴-۱. ACF خطاهای مدل اتورگرسیو مربوط به برآورد نیمه پارامتری تابع غیرخطی

$$\lambda = 0.13, n=600 \text{ و } f(x) = 7x^2e^{-x^2}$$



نمودار ۵-۱. ACF خطاهای مدل اتورگرسیو مربوط به برآورد نیمه پارامتری تابع غیرخطی

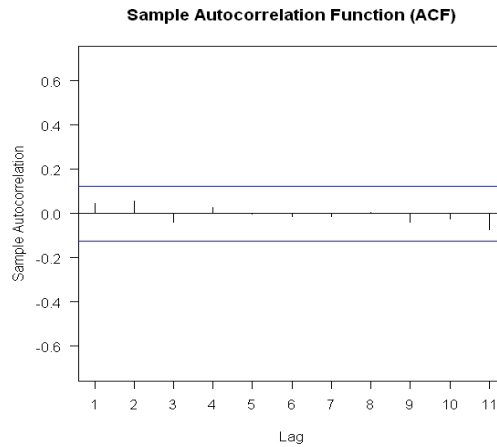
$$\lambda = 0.26, n=600 \text{ و } f(x) = 7x^2e^{-x^2}$$



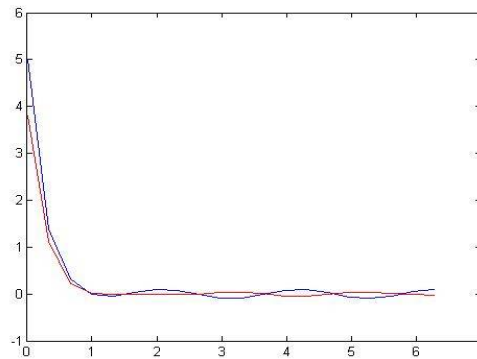


نمودارهای (۱-۷) و (۱-۸)، منحنی تابع  $f(x)$  و برآوردگر نیمه پارامتری آنرا نشان می‌دهند. هر دو نمودار بیانگر شبیه‌سازی شده می‌باشند. کفایت برآورد نیمه پارامتری تابع غیرخطی، بر اساس مدل

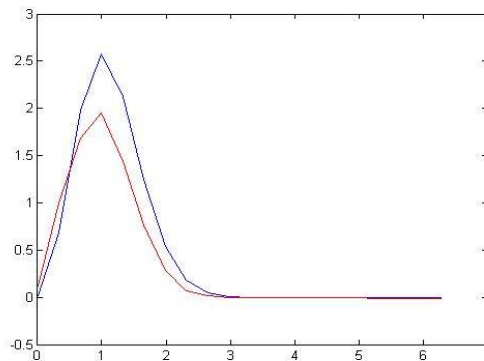
نمودار ۶-۱. ACF خطاهای مدل اتورگرسیو مربوط به برآورد نیمه پارامتری تابع غیرخطی  
 $\lambda = 0.4, n = 600$  و  $f(x) = 7x^2 e^{-x^2}$



نمودار ۷-۱. نمودار منحنی  $f(x)$  و برآورد نیمه پارامتری تابع غیرخطی  
 $f(x) = 5e^{-4x} + 0.1\cos(3x)$  در مدل اتورگرسیو با خطای مستقل,  $\lambda = 0.4, n = 600$



نمودار ۸-۱. نمودار منحنی  $f(x)$  و برآورد نیمه پارامتری تابع غیرخطی  
 $f(x) = 7x^2 e^{-x^2}$  در مدل اتورگرسیو با خطای مستقل,  $\lambda = 0.4, n = 600$



## ۳-۲. کاربرد تجربی

به‌منظور بررسی کفایت روش این پژوهش، از مدل اتورگرسیو خطی جزئی برای پیش‌بینی سالانه‌ی قیمت نفت اوپک از سال ۲۰۱۰ تا سال ۲۰۱۶ استفاده شده است. در این راستا، مشاهدات به‌صورت  $y_t^* = (y_t - y_{t-1})/y_{t-1}$  در نظر گرفته شده‌اند، به‌طوری‌که  $y_t$  قیمت نفت اوپک در زمان  $t$  است. با استفاده از روش نیمه‌پارامتری ارائه شده، تابع رگرسیون در مدل اتورگرسیو با خطای مستقل جهت پیش‌بینی قیمت نفت اوپک در زمان  $t$  برآورد شده است. مجموعه‌ی

داده‌ها از سایت رسمی [www.opec.org](http://www.opec.org) استخراج شده‌اند. نتایج این بررسی در جدول ۵-۱، آورده شده است. جدول ۶-۱، شاخص‌های توصیفی خطاهای قیمت نفت اوپک را نشان می‌دهند که در آن خطاهای مدل مستقل می‌باشند. نمودار ۹-۱، ACF خطاهای برآورد مدل اتورگرسیو خطی جزئی را نشان می‌دهد. در نهایت، نمودار ۱۰-۱، منحنی مشاهدات و برآورد آن‌ها به روش نیمه‌پارامتری را نشان می‌دهد.

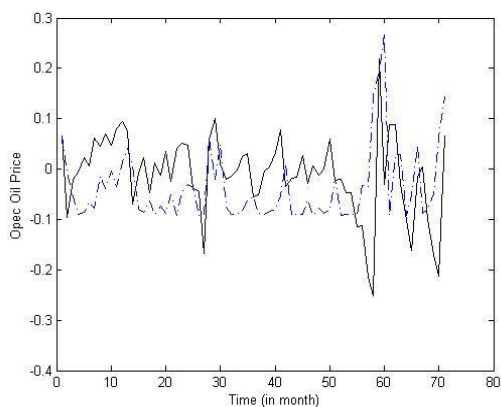
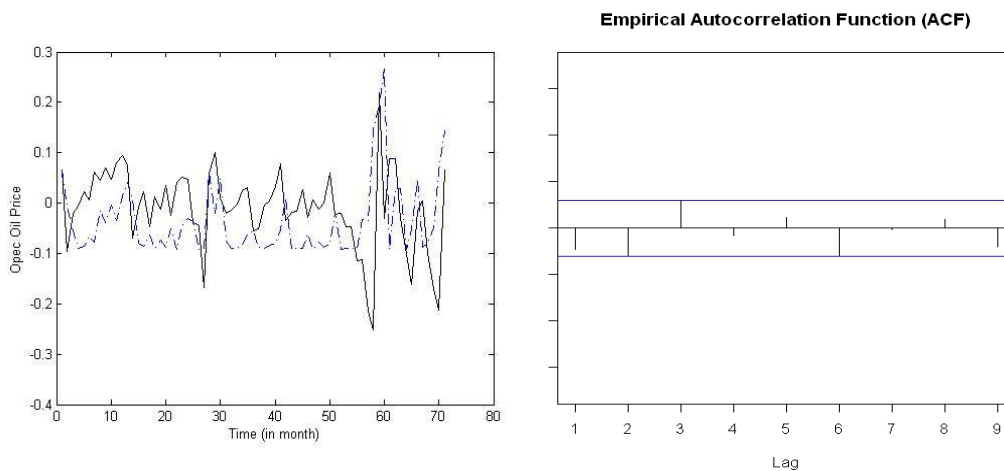
جدول ۵-۱. MSE(RMSE) برآورد تابع رگرسیون برای داده‌های قیمت نفت اوپک، از سال ۲۰۱۰ تا سال ۲۰۱۶.

n	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	MSE	RMSE
71	(-0.017, 0.069, 1.695)	0.26	0.013	0.115

جدول ۶-۱. شاخص‌های توصیفی خطاهای قیمت نفت اوپک، از سال ۲۰۱۰ تا سال ۲۰۱۶.

var	n	Min	Max	Mean	std	Sum
data	71	-0.25	0.21	-0.010	0.08	-0.75
error	۷۱	-0.35	0.11	0.004	0.07	0.28

نمودار ۹-۱. ACF خطاهای برآورد قیمت نفت اوپک. نمودار ۱۰-۱. منحنی مشاهدات واقعی و برآورد آن‌ها.



### نتیجه گیری

مدل اتورگرسیو خطی جزئی در اقتصاد سنجی، مطالعات مالی، علوم آماری و مدل‌های زیست محیطی کاربرد فراوان دارد. در این پژوهش، یک روش جدید نیمه پارامتری برای برآورد تابع اتورگرسیو غیرخطی در یک مدل اتورگرسیو خطی جزئی ارائه شده است. از آنجا که روش‌های پارامتری در برآورد تابع رگرسیون نمی‌توانند در این گونه مدل‌ها خیلی کارا باشند، ترکیبی از فرم پارامتری با به‌کارگیری بسط تیلور و توابع غیرخطی استفاده شده است. به منظور بررسی دقت مدل پیشنهادی از معیار میانگین مربعات خطاها (MSE) و جذر آن (RMSE) استفاده شده است. همچنین، تابع خودهمبستگی (ACF) خطاهای مدل اتورگرسیو خطی جزئی در مدل تجربی بیانگر این مطلب هستند که خطاهای مدل ناهمبسته می‌باشند. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که برآورد نیمه پارامتری در مدل اتورگرسیو خطی جزئی با خطاهای مستقل بهتر عمل می‌کند و دارای دقت و کارایی نسبتاً بالایی می‌باشد.

## فهرست منابع

- [8] Hamilton, J., (1983), "Oil and the Macroeconomy since World War ii", *Journal of Political Economy*, Vol. 91, 228-248.
- [9] Hjort, N.L. and Jones, M.C. (1996), "Locally parametric nonparametric density estimation", *Ann. Stat*, 24, 1647-1619
- [10] Jimenez-Rodriguez, R. and Marcelo, S. (2004), "Oil Price Shocks and Real Growth: Empirical Evidence for Some OECD Countries", Working Paper, European Central Bank.
- [11] Morana, C. (2001), "A Semiparametric Approach to Short-Term Oil Price Forecasting", *Energy Economics*, 23, 325-338.
- [12] Mortazavi, S. J. and Farnoosh, R. (2013), "The prediction nonlinear-autoregressive model for annual ring width of pinus eldarica with semi-parametric approach", Vol. 26, No.6, *World Applied Sciences Journal*, 783-787.
- [13] Naito, K. (2004), "Semiparametric density estimation by local L2-fitting", *Ann. Stat*, 32, 1662-1191.
- [14] Park, J. and Ratti, R. A., (2008), "Oil Price Shock Markets in the U.S. and 13 European Countries," *Energy Economics*, 30, 2587-2608.
- [۱] جوانمرد، حبیب اله و فقیدیان، سیده فاطمه (۱۳۹۳). پیش‌بینی قیمت نفت خام اوپک با به‌کارگیری مدل پیش‌بینی خاکستری. فصلنامه‌ی مدل‌سازی اقتصادی، ۸ (۲۷): ۹۱-۱۱۴.
- [۲] رودیگر، دورنبوش و استانلی، فیشر (۱۳۷۸)، اقتصاد کلان، ترجمه‌ی محمدحسین تیزهوش تابان، تهران: انتشارات سروش، چاپ سوم.
- [۳] شهبازی، کیومرث، اصغرپور، حسین و محرم زاده، کریم (۱۳۹۱) تاثیر فرآورده‌های نفتی بر رشد اقتصادی در استان‌های کشور. فصلنامه‌ی مدل‌سازی اقتصادی، ۶ (۱۷): ۲۵-۴۴.
- [۴] مکیان، سیدنظام الدین و موسوی، سید فاطمه السادات (۱۳۹۱). پیش‌بینی قیمت سهام شرکت فرآورده‌های نفتی پارس با استفاده از شبکه‌ی عصبی و روش رگرسیون. فصلنامه‌ی مدل‌سازی اقتصادی، ۶ (۱۸): ۱۰۵-۱۲۱
- [5] Farnoosh, R. and Mortazavi, S.J. (2011), "A semiparametric method for estimating nonlinear autoregressive model with dependent errors", *Nonlinear Analysis*, 6358-6370.
- [6] Farnoosh, R., Hajebi, M. and Mortazavi, S.J. (2014), "A semiparametric estimation for regression functions in the partially linear autoregressive time series model", *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, 573-591.
- [7] Farnoosh, R., Nabati, P. and Azizi, M. (2016), "Simulating and Forecasting OPEC Oil Price Using Stochastic Differential Equations", *Journal of New Researches in Mathematics*, 2 (7), 21-30.