دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره هشتم، زمستان ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

پژوهش‌های نوین در ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پیدا کردن کاراترین واحد تصمیم‌گیری در تحلیل پوششی داده‌ها

جواد وکیلی *

استادیار، دانشگاه تبریز، گروه ریاضی کاربردی، تبریز، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۷/۱۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۱۱/۲۰

چکیده

اگرچه تمایز بین همه واحدهای تصمیم‌گیری کارا (DMUها) با کارایی یکسان یک موضوع خیلی مهمی در تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد، ولی کار ساده‌ای نیست، به‌ویژه زمانی‌که تصمیم‌گیرنده بخواهد یک و تنها یک DMUی کارا را از بین همه واحدهای تصمیم‌گیری کارا انتخاب کند. تعدادی مقاله وجود دارند که روش‌هایی را برای پیدا کردن یک واحد کارا به‌عنوان کاراترین ارایه داده‌اند، اما بعضی از آنها در عمل با مشکلاتی مواجه هستند. در این مقاله به تعدادی از مشکلات موجود در مقالات [Amin, G. R., (2009). Comments on finding the most efficient DMUs in DEA: An improved integrated model. Computers and Industrial Engineering, 56, 1701-1702; Toloo, M., Nalchigar, S., (2009). A new integrated DEA model for finding most BCC-efficient DMU. Applied Mathematical Modelling, 33, 597-604] اشاره می‌شود. در واقع در مقاله حاضر با تعدادی مثال اثبات می‌شود که اگرچه بعضی مقالات اساساً به‌منظور مشخص کردن یک واحد تصمیم‌گیری کارا به‌عنوان کاراترین ارایه شده‌اند، ولی آنها ممکن است نتوانند این واحدها را به‌درستی پیدا کنند.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، کاراترین واحد تصمیم‌گیری.

*. j.vakili@tabrizu.ac.ir

۱. مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک تکنیک بهینه‌سازی ریاضی برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) با ورودی‌های چندگانه برای تولید خروجی‌های چندگانه می‌باشد. DEA ابتدا توسط چارنز و همکاران[۴] (مدل CCR) ارایه شد و سپس توسط دیگران از جمله بنکر و همکاران[۳] (مدل BCC) توسعه یافت. در تحلیل پوششی داده‌ها، به‌منظور ارزیابی عملکرد DMUها، کارایی واحدهای تصمیم‌گیری به صورت نسبت مجموع وزن‌دار خروجی‌ها به نسبت مجموع وزن‌دار ورودی‌ها و کارایی نسبی آنها نسبت کارایی آنها به ماکزیمم کارایی همه واحدهای تصمیم‌گیری تعریف می‌شود. وزن‌ها متغیرهای مدل‌های DEA می‌باشند و واحدها در انتخاب وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها آزادی کامل دارند به‌طوری‌که ماکزیمم کارای نسبی‌شان حاصل شود. تحلیل پوششی داده‌ها واحدها را به دو گروه تقسیم می‌کند: واحدهای تصمیم‌گیری کارا و ناکارا. واحدهای تصمیم‌گیری کارا دارای کارایی نسبی یکسان مساوی با یک و بقیه واحدها دارای کارایی نسبی بین صفر و یک می‌باشند. می‌دانیم که معمولاً تعداد زیادی از واحدهای تصمیم‌گیری کارا محسوب می‌شوند. با وجود این، ادعای اینکه همه واحدهای کارا در عمل عملکرد یکسان دارند ادعای درستی نیست و بعضی مواقع ضروری است روش‌هایی جهت تمایز بین واحدهای کارا پیشنهاد داده شوند. به‌ویژه ممکن است تصمیم‌گیرنده بخواهد یک و تنها یک واحد تصمیم‌گیری را در میان همه واحدهای تصمیم‌گیری به‌عنوان کاراترین آنها معرفی کند. تعدادی مقاله در این زمینه وجود دارند که روش‌هایی را برای پیدا کردن کاراترین واحد تصمیم‌گیری ارایه کرده‌اند که بعضی از آنها در عمل دارای ایراداتی می‌باشند.

برای مثال، ارتای و همکاران[۵] در این زمینه بر اساس DEA یک روش تصمیم‌گیری را برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری ارایه داده‌اند. روش مینی‌ماکس آنها برای یک مجموعه از داده‌های حقیقی به‌کار برده می‌شود که شامل نوزده واحد تصمیم‌گیری می‌باشد. توابع هدف مدل‌های مینی-ماکس آنها شامل یک پارامتر می‌باشند که توسط یک روش آزمایش خطا طوری انتخاب می‌شوند که یک واحد تصمیم‌گیری منحصربفرد حاصل شود. در روش آنها، برای ارزیابی این واحدها نیاز به حل n برنامه‌ریزی خطی مینی-ماکس می‌باشد (n تعداد واحدهای تصمیم‌گیری‌ها می‌باشد). با این‌حال، امین و طلوع[۲] با یک مثال عددی به یک مشکل مربوط به همگرایی روش مینی-ماکس ارایه شده توسط ارتای و همکاران[۵] اشاره کرده و بنابراین نشان دادند که روش آنها ممکن است در مشخص کردن کاراترین واحد تصمیم‌گیری به‌درستی عمل نکند. سپس، آنها کار ارتای و همکاران[۵] را بهبود دادند و مدلی را به‌منظور تعیین این DMUها در حالت بازده به مقیاس ثابت (CRS) پیشنهاد دادند. برای انجام این، مدل آنها عملکرد همه واحدها را با یک مجموعه از وزن‌های مشترک ارزیابی می‌کند. امین و طلوع[۲] ادعا می‌کنند که مدل‌شان قادر است بدون حل n مساله برنامه‌ریزی خطی یک واحد تصمیم‌گیری کارای CCR را به‌عنوان کاراترین پیدا کند. با وجود این، امین[۱] نشان داد که مدل امین و طلوع[۲] ممکن است بیش از یک واحد را به‌عنوان کاراترین معرفی کند و بنابراین در پیدا کردن کاراترین واحد تصمیم‌گیری شکست می‌خورد. سپس، وی مدل امین و طلوع[۲] را برای پیدا کردن کاراترین واحد تصمیم‌گیری اصلاح کرد. سرانجام، طلوع و نعلچگر[۶] یک مدل جدیدی را مشابه با مدل امین و طلوع[۲] برای مشخص کردن یک واحد تصمیم‌گیری کارای BCC به‌عنوان کاراترین واحد ارایه دادند که قادر است تنها با حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی این واحد را مشخص کند.

در این مقاله، مدل‌های ارایه شده توسط امین[۱] و طلوع و نعلچگر[۶] مورد مطالعه قرار گرفته و اثبات می‌شود که روش‌های آنها در به‌دست آوردن کاراترین واحد تصمیم‌گیری ناتوان هستند و در واقع مشکلات مربوط به روش‌های آنها توسط دو مثال شرح داده می‌شود. در حقیقت، نشان داده می‌شود که مدل امین[۱] ممکن است نشدنی باشد و مدل طلوع و نعلچگر[۶] مشابه با روش امین و طلوع[۲] ممکن است بیش از یک واحد تصمیم‌گیری کارا را به‌عنوان کاراترین معرفی کند در صورتی که هدف آنها ارایه تنها یک واحد تصمیم‌گیری به‌عنوان کاراترین می‌باشد.

۲. نتایج اصلی

یک مجموعه از n واحد تصمیم‌گیری $\{DMU_1, DMU_2, \ldots, DMU_n\}$ را در نظر بگیرید که در آن هر DMU_j برای $j \in \{1,2,\ldots,n\}$، s خروجی y_{rj}، $r = 1,2,\ldots,s$، را با استفاده از m ورودی x_{ij}، $i = 1,2,\ldots,m$ تولید می‌کند. با در نظر گرفتن n بهینه‌سازی خطی، DEA به‌طور موفقیت‌آمیز این واحدها را به دو گروه واحدهای تصمیم‌گیری کارا و ناکارا تقسیم می‌کند. می‌دانیم که معمولاً تعداد نسبتاً زیادی از واحدهای تصمیم‌گیری کارا تشخیص داده می‌شوند. بعضی مواقع ممکن است تصمیم‌گیرنده بخواهد یک و تنها یک واحد تصمیم‌گیری را در میان همه واحدهای تصمیم‌گیری به‌عنوان کاراترین آنها معرفی کند. مقالات زیادی در این زمینه وجود دارند که سعی دارند یک واحد تصمیم‌گیری را به‌عنوان کاراترین معرفی کنند، ولی در عمل دارای مشکل می‌باشند. در این مقاله به مشکلات دو مقاله از این مقالات اشاره می‌شود که سعی دارند یک واحد تصمیم‌گیری را به‌عنوان کاراترین واحد معرفی کنند. ابتدا، مدل امین و طلوع[۲] را برای به‌دست آوردن کاراترین واحد در حالت CRS به‌صورت زیر مرور می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & M \\
\text{s.t.} \quad & M - d_j \ge 0, \\
& j = 1,2,\ldots,n \\
& \sum_{i=1}^{m} w_i x_{ij} \le 1, \\
& j = 1,2,\ldots,n \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} w_i x_{ij} + d_j - \beta_j = 0, \\
& j = 1,2,\ldots,n \\
& \sum_{j=1}^{n} d_j = n-1 \\
& 0 \le \beta_j \le 1, \ d_j \in \{0,1\}, \\
& j = 1,2,\ldots,n \\
& w_i \ge \varepsilon^*, \\
& i = 1,2,\ldots,m \\
& u_r \ge \varepsilon^*, \\
& r = 1,2,\ldots,s \\
& M, \ \text{آزاد}
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

که در آن ε^* با حل مساله (۲) به‌دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^* = \max \quad & \varepsilon \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} w_i x_{ij} \le 1, \\
& j = 1,2,\ldots,n \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} w_i x_{ij} \le 0, \\
& j = 1,2,\ldots,n \\
& w_i - \varepsilon \ge 0, \\
& i = 1,2,\ldots,m \\
& u_r - \varepsilon \ge 0, \\
& r = 1,2,\ldots,s.
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

امین و طلوع[۲] ادعا می‌کنند که مدل آنها همیشه یک واحد کارا را به‌عنوان کاراترین معرفی می‌کند. ولی، امین[۱] نشان داد که مدل (۱) ممکن است یک مجموعه از وزن‌های مشترک را برای همه واحدهای تصمیم‌گیری طوری ارایه دهد که با این وزن‌ها بیش از یک واحد تصمیم‌گیری کارا تشخیص داده شوند. به‌عبارت دیگر، امین[۱] نشان داد که مجموعه $\{j \mid d_j^* - \beta_j^* = 0\}$ در بهینگی مساله (۱) ممکن است بیش از یک عضو داشته باشد و چون برای هر $j \in \{j \mid d_j^* - \beta_j^* = 0\}$، DMU_j یک واحد کاراست، لذا مساله (۱) ممکن است بیش از یک واحد کارا را به‌عنوان کاراترین معرفی کند. بعد از آن، امین[۱] یک مدل غیرخطی را به‌صورت زیر به‌منظور بهبود مدل (۱) بالا ارایه داد.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & M \\
\text{s.t.} \quad & M - d_j \ge 0, \\
& j = 1,2,\ldots,n \\
& \sum_{i=1}^{m} w_i x_{ij} \le 1, \\
& j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} w_i x_{ij} + d_j = 0, \\
& j = 1,2,\dots,n \\
& \sum_{j=1}^{n} \theta_j = n-1 \\
& \theta_j - d_j \beta_j = 0, \\
& j = 1,2,\dots,n \\
& \beta_j \geq 1, d_j \geq 0, \theta_j \in \{0,1\}, \\
& j = 1,2,\dots,n \\
& w_i \geq \varepsilon^*, \\
& i = 1,2,\dots,m \\
& u_r \geq \varepsilon^*, \\
& r = 1,2,\dots,s \\
& M, \quad \text{آزاد}
\end{aligned}
$$

که ε^* با حل مدل (۲) مشابه با مدل امین و طلوع[۲] به‌دست می‌آید. با توجه به مدل (۳)، واضح است که قیدهای غیرخطی $\theta_j - d_j \beta_j = 0$، $j = 1,2,\dots,n$، همراه با مجموع متغیرهای دودویی $\sum_{j=1}^{n} \theta_j = n-1$ تضمین می‌کنند که یک و تنها یکی از متغیرهای انحراف d_j می‌تواند صفر شود. اما در اینجا ما اثبات می‌کنیم که این قیدها ممکن است به نشدنی بودن مدل (۳) منتهی شوند و بنابراین ممکن است که این مدل نتواند یک واحد را به عنوان کاراترین معرفی کند. برای توضیح بیشتر، مثال ۱ در نظر بگیرید.

مثال ۱. واحدهای

$$\mathrm{DMU}_1 = (1, 2, 0.5), \mathrm{DMU}_2 = (2, 4, 1)$$

و

$$\mathrm{DMU}_3 = (1, 1.5, 1), \mathrm{DMU}_4 = (3, 4.5, 3)$$

را به‌عنوان واحدهای تصمیم‌گیری مشاهده شده با یک ورودی و دو خروجی در نظر بگیرید. توجه کنید که همه این واحدها کارای CCR می‌باشند. واضح است که مدل (۳) برای چهار واحد مذکور در این مثال به‌صورت مساله (۴) ظاهر می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
& \min \quad M \\
& \text{s.t.} \quad M - d_j \geq 0, \\
& j = 1,2,3,4 \\
& 1w \leq 1, \\
& 2w \leq 1, \\
& 3w \leq 1, \\
& 2u_1 + 0.5u_2 - w + d_1 = 0 \\
& 4u_1 + 1u_2 - 2w + d_2 = 0 \\
& 1.5u_1 + 1u_2 - w + d_3 = 0 \\
& 4.5u_1 + 3u_2 - 3w + d_4 = 0 \\
& \sum_{j=1}^{4} \theta_j = 4-1 \\
& \theta_j - d_j \beta_j = 0, \\
& j = 1,2,3,4 \\
& \beta_j \geq 1, d_j \geq 0, \theta_j \in \{0,1\}, \\
& j = 1,2,3,4 \\
& w \geq \frac{2}{15}, \\
& u_1 \geq \frac{2}{15}, \\
& u_2 \geq \frac{2}{15}, \\
& M, \quad \text{آزاد}
\end{aligned} \tag{۴}
$$

که در آن مقدار بهینه مدل (۵) برای این واحدها $\frac{2}{15}$ می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
& \max \quad \varepsilon \\
& \text{s.t.} \\
& 1w \leq 1, \\
& 2w \leq 1, \\
& 3w \leq 1, \\
& 2u_1 + 0.5u_2 - w \leq 0 \\
& 4u_1 + 1u_2 - 2w \leq 0 \\
& 1.5u_1 + 1u_2 - w \leq 0 \\
& 4.5u_1 + 3u_2 - 3w \leq 0
\end{aligned} \tag{۵}
$$

$$w-\varepsilon \geq 0,$$
$$u_1-\varepsilon \geq 0,$$
$$u_2-\varepsilon \geq 0.$$

حال اثبات می‌کنیم که مساله (۴) نشدنی است. برای انجام این کار، به تناقض فرض کنید که

$$(\overline{M},\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{w},\overline{d}_1,\overline{d}_2,\overline{d}_3,\overline{d}_4,$$
$$\overline{\beta}_1,\overline{\beta}_2,\overline{\beta}_3,\overline{\beta}_4,\overline{\theta}_1,\overline{\theta}_2,\overline{\theta}_3,\overline{\theta}_4)$$

یک جواب شدنی مساله (۴) باشد. در این‌صورت، چون $DMU2 = 2 \times DMU1$ و $DMU3 = 3 \times DMU4$، بنابراین

$$\overline{d}_1 = 0 \Leftrightarrow \overline{d}_2 = 0 \qquad (۶)$$
$$\overline{d}_3 = 0 \Leftrightarrow \overline{d}_4 = 0.$$

همچنین می‌دانیم که $\overline{\theta}_j - \overline{d}_j\overline{\beta}_j = 0$، $j=1,2,3,4$ همراه با مجموع متغیرهای دودویی $\sum_{j=1}^{4}\overline{\theta}_j = 3$ نتیجه می‌دهند که یکی از متغیرهای $\overline{d}_j$ می‌تواند صفر شود که این با رابطه (۶) در تناقض است. بنابراین، مساله (۴) نشدنی است (این را می‌توان با حل مدل (۴) نیز نشان داد). این نتیجه می‌دهد که مدل ارایه شده توسط امین[۱] (مدل (۳)) ممکن است در مشخص کردن یک واحد کارا به‌عنوان کاراترین شکست بخورد. به‌عبارت دیگر، این مثال نقض نشان می‌دهد که اگرچه در این مثال چهار واحد تصمیم‌گیری کارا وجود دارد، ولی مدل امین[۱] نمی‌تواند هیچ واحدی را به عنوان کاراترین واحدها تشخیص دهد. مدل‌های بالا در حالت CRS بیان شده‌اند. اخیرا، طلوع و نعلچگر[۶] یک مدل DEA بهبود یافته‌ای را برای به‌دست آوردن کاراترین واحد BCC معرفی کرده‌اند که مدل آنها به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\min \quad M$$
$$\text{s.t.} \quad M - d_j \geq 0,$$
$$j=1,2,\ldots,n$$
$$\sum_{i=1}^{m} w_i x_{ij} \leq 1,$$
$$j=1,2,\ldots,n$$
$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} w_i x_{ij} - u_o + d_j - \beta_j = 0,$$
$$j=1,2,\ldots,n$$
$$\sum_{j=1}^{n} d_j = n-1$$
$$0 \leq \beta_j \leq 1, d_j \in \{0,1\},$$
$$j=1,2,\ldots,n \qquad (۷)$$
$$w_i \geq \varepsilon^*,$$
$$i=1,2,\ldots,m$$
$$u_r \geq \varepsilon^*,$$
$$r=1,2,\ldots,s$$
$$M, u_o \quad \text{آزاد}$$

که

$$\varepsilon^* = \max \quad \varepsilon$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} w_i x_{ij} \leq 1,$$
$$j=1,2,\ldots,n$$
$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} w_i x_{ij} - u_o \leq 0,$$
$$j=1,2,\ldots,n \qquad (۸)$$
$$w_i - \varepsilon \geq 0,$$
$$i=1,2,\ldots,m$$
$$u_r - \varepsilon \geq 0,$$
$$r=1,2,\ldots,s.$$
$$u_o, \quad \text{آزاد}$$

حال نشان می‌دهیم که مدل (۷) ممکن است مشکلاتی مشابه با مشکلات مدل (۱) را در مشخص کردن کاراترین واحد تصمیم‌گیری داشته باشد. به‌عبارت دیگر، توسط مثال ۲ نشان داده می‌شود که مدل (۷) ممکن است بر خلاف ادعای طلوع و نعلچگر[۶] بیش از یک واحد کارا را به‌عنوان کاراترین تشخیص دهد.

مثال ۱. پنج واحد تصمیم‌گیری

$DMU1=(2,2,1), DMU2=(3,1,1), DMU3=(1,3,1), DMU4=(3,3,1), DMU5=(4,2,1)$

را با دو ورودی و یک خروجی به‌عنوان واحدهای تصمیم‌گیری مشاهده شده در نظر بگیرید. اولاً، $\varepsilon^*=\frac{1}{6}$ مقدار بهینه مدل (۸) برای این واحدها می‌باشد. بنابراین، بر اساس روش طلوع و نعلچگر[۶]، مساله (۹) باید به‌منظور پیدا کردن کاراترین واحد حل شود.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad M\\
&\text{s.t.} \quad M-d_j\ge 0,\\
&j=1,2,3,4,5\\
&2w_1+2w_2\le 1,\\
&3w_1+w_2\le 1,\\
&w_1+3w_2\le 1,\\
&3w_1+3w_2\le 1,\\
&4w_1+2w_2\le 1,\\
&u-2w_1-2w_2-u_o+d_1-\beta_1=0\\
&u-3w_1-w_2-u_o+d_2-\beta_2=0\\
&u-w_1-3w_2-u_o+d_3-\beta_3=0\\
&u-3w_1-3w_2-u_o+d_4-\beta_4=0\\
&u-4w_1-2w_2-u_o+d_5-\beta_5=0\\
&\sum_{j=1}^{4}\theta_j=4\\
&0\le\beta_j\le 1,\ d_j\in\{0,1\},\\
&j=1,2,3,4,5\\
&u\ge\frac{1}{6},\\
&w_1\ge\frac{1}{6},\\
&w_2\ge\frac{1}{6},\\
&M,u_o \quad \text{آزاد}
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

با در نظر گرفتن این حقیقت که مقدار بهینه مساله (۹) همیشه مساوی با یک است،

$$(M^*=1,u^*=\frac{2}{3},w_1^*=\frac{1}{6},w_2^*=\frac{1}{6},u_o^*=0,$$
$$d_1^*=0,d_2^*=1,d_3^*=1,d_4^*=1,d_5^*=1)$$

$$\beta_1^*=0,\beta_2^*=1,\beta_3^*=1,\beta_4^*=\frac{2}{3},\beta_5^*=\frac{2}{3})$$

یک جواب بهینه مساله (۹) می‌باشد. بنابراین، $d_1^*-\beta_1^*=0$، $d_2^*-\beta_2^*=0$ و $d_3^*-\beta_3^*=0$ نتیجه می‌دهند که $u^*-2w_1^*-2w_2^*-u_o^*=0$، $u^*-3w_1^*-w_2^*-u_o^*=0$ و $u^*-w_1^*-3w_2^*-u_o^*=0$. این معنی می‌دهد که مدل (۹) وزن‌های مشترکی را برای همه واحدهای تصمیم‌گیری ارایه می‌دهد به‌طوری که DMU_1، DMU_2 و DMU_3 با این وزن‌ها کارا می‌باشند. بنابراین، مدل ارایه شده توسط طلوع و نعلچگر[۶] بیش از یک واحد کارا را به‌عنوان کاراترین واحد تشخیص می‌دهد که این نیز برخلاف ادعای آنها می‌باشد.

نتیجه‌گیری

این مقاله به تعدادی از مشکلات مربوط به دو مقاله ارایه شده توسط امین[۱] و طلوع و نعلچگر[۶] که برای ارایه یک واحد کارا به‌عنوان کاراترین واحدها ارایه شده‌اند اشاره می‌کند. در حقیقت، نشان داده می‌شود که مدل‌های ارایه شده توسط ایشان ممکن است نشدنی باشند یا به‌جای یک تک واحد کارا بیش از یکی را به‌عنوان کاراترین معرفی کنند در حالی که وظیفه این مدل‌ها این نیست. بنابراین، شایان ذکر است که در حقیقت، اگرچه چهار مقاله ارتای و همکاران[۵]، امین[۱]، امین و طلوع[۲] و طلوع و نعلچگر[۶] اساساً در مشخص کردن یک واحد به‌عنوان کاراترین واحد تصمیم‌گیری مشکل دارند در صورتی که هدف اصلی آنها همین می‌باشد.

فهرست منابع

[1] Amin, G. R., (2009). Comments on finding the most efficient DMUs in DEA: An improved integrated model. Computers and Industrial Engineering, 56, 1701-1702.

[2] Amin, G. R., Toloo, M., (2007). Finding the most efficient DMUs in DEA: an improved integrated model. Computers and Industrial Engineering, 52, 71-77.

[3] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W., (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science, 30, 1078-1092.

[4] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978) . Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2, 429-444.

[5] Ertay, T., Ruan, D., Tuzkaya, U. R., (2006). Integrating data envelopment analysis and analytic hierarchy for the facility layout design in manufacturing systems. Information Sciences,176, 237-262.

[6] Toloo, M., Nalchigar, S., (2009). A new integrated DEA model for finding most BCC-efficient DMU. Applied Mathematical Modelling, 33, 597-604.